Bases de traitement du signal

Par (Lanfeust 313)

OPENCLASSROOMS

www.openclassrooms.com

Dernière mise à jour le 15/11/2011

Sommaire

Sommaire ... 2
Lire aussi ... 1
Bases de traitement du signal ... 3
Partie 1 : Exorde ... 4
À la croisée des chemins ... 5
Une journée comme les autres ... 5
Un signal, des signaux ? ... 6
Qu'est ce qu'un signal ? ... 6
Qu'est ce que le traitement du signal ? ... 7
Champ d'applications ... 9
Traitement d'images ... 9
Traitement audio ... 10
Communications ... 11
Et encore plein d'autres ! ... 12
Des signaux à tous les étages ... 12
En quelle dimension ? ... 13
Un signal, un signal, un signal,... ... 13
La nature des signaux ... 18
Energie et puissance d'un signal ... 21
Résumé ... 23
Le bruit, une notion relative ... 24
Le même pour tout le monde ? ... 24
Qui est le plus fort ? ... 26
Échelle linéaire ... 27
Échelle logarithmique ... 27

Bases de traitement du signal

Par  Lanfeust 313

Mise à jour : 15/11/2011
Difficulté : Intermédiaire

Traitement du signal. Sous ce nom barbare se cache une discipline à la frontière entre mathématiques, électronique et informatique. Conditionnement, compréhension et analyse du monde qui nous entoure seront les maitres mots de cours qui vous emmènera dans les secrets du signal processing *(Oui, je parle anglais)*

Quels sont les objectifs ?

Le traitement du signal est une discipline qui est méconnue car elle se fond à l'intersection de plusieurs domaines scientifiques. Les premiers développements trouvent leurs origines dans l'électronique et l'automatique. Dans les années 1960, l'arrivée des ordinateurs et le début de la numérisation des signaux font basculer la discipline dans l'informatique moderne.

Mais avant tout, le traitement du signal tire ces outils de plusieurs domaines des mathématiques, dont les résultats ont été formulés un siècle avant ! On peut ainsi évoquer les espaces vectoriels, l'algèbre linéaire, les probabilités, les statistiques, les distributions, l'optimisation,... En 1949, Shannon et son livre *'A Mathematical Theory of Communications'* théorisent le concept d'information très utile en traitement du signal. Si ces disciplines n'évoquent rien ou un bien trop lointain souvenir pour vous, nous sommes là pour les (re)découvrir.

Ce cours a pour objectif de vous faire découvrir les bases de **la théorie du signal** qui a pour but principal la description mathématique des signaux. Ce travail nous permettra de mettre en valeur les différentes caractéristiques et propriétés des signaux. Tout ça nous sera utile pour développer les principaux outils de **traitement du signal** qui seront utilisés dans plein de domaines techniques et scientifiques. Attention cependant, ce cours n'est pas pas orienté informatique ou électronique. Tous les outils de traitement du signal ont des influences concrètes sur ces domaines, mais nous ne discuterons pas de l'implémentation d'un algorithme dans tel ou tel langage ou du choix d'un composant pour un système électronique.

Ce cours est en français, mais vous imaginez bien que qu'on ne fait pas du traitement du signal qu'en France. Tout le vocabulaire de traitement du signal est finalement plus connu en anglais. Pour vous aider à apprendre ce ce vocabulaire, vous verrez que certains mots seront soulignés en pointillés. Si vous passez votre souris dessus, vous y verrez la traduction en anglais comme par exemple : Traitement du signal

Quels sont les pré-requis ?

Je vais tenter de rendre accessible au maximum les notions fondamentales, mais un minimum de bagage mathématique reste utile :

- Savoir ce qu'est une fonction, comment la représenter dans un graphe et connaitre les fonctions les plus classiques ($\sqrt{x}$, $\cos(x)$,$\sin(x)$,e^x,...) et leur propriétés.
- Connaitre le principe de calcul de l'intégrale d'une fonction.
- Des nombres complexes pourront trainer à certains endroits.

L'écriture des mathématiques est rempli de symboles qui peuvent sembler obscurs, mais qui sont plutôt simples à comprendre. Si des choses comme $\int$,$\sum$,$\prod$,$\forall$,$\Leftrightarrow$ ou $\in$ ne vous évoquent rien, ne butez pas et n'hésitez pas à vous renseigner. Les notations ne doivent être un obstacle.

Quels sont les outils utilisés dans ce cours ?

Toutes les courbes que vous verrez dans ce cours sont générés à l'aide de logiciels de calcul numérique. Ils permettent grâce à un langage de programmation propre et des outils adapté aux problèmes scientifiques de travailler sur des problématiques de traitement de signal *(et bien d'autres)*. J'utiliserais indifféremment Matlab ou Scilab pour ce travail. Les deux permettent de faire la même chose. Le premier est payant mais largement utilisé en recherche, éducation, R&D,... Au contraire, Scilab est un outil libre et gratuit que vous pouvez aller télécharger à cette adresse : http://www.scilab.org/. Vous pourrez essayer de tester quelques résultats que nous évoquerons durant ce cours. Il est possible que je vous donne, dans certains chapitres, quelques clés pour pouvoir tester des choses sous Scilab.

Ont aussi été mis à contribution : Gimp, Inskcape, Audacity, Grapher et Pages.

Pour qui est ce cours ?

Pour tous ceux qui veulent découvrir cette discipline, de quelque niveau ou formation scolaire que vous soyez. N'hésitez pas à vous lancer dans une lecture, vous y apprendrez beaucoup de choses !

Partie 1 : Exorde

À la croisée des chemins

Qu'est ce que le traitement du signal ?

Quelles sont ces applications dans notre vie quotidienne ?

Nous allons répondre à ces questions dans ce premier chapitre.

Une journée comme les autres

Avant toute considération scientifique ou pratique, j'aimerais vous narrer une journée en toute somme banale et qui pourrait être le quotidien de chacun d'entre nous. Et cette journée sera vécu par notre cobaye, Bob.

07:00	-	Le réveil sonne. Bob, l'entendant, comprend bien qu'il faut se lever. Après avoir lâché quelques jurons et tapé quelques coups dans le vide, il parvient à l'éteindre.
08:10	-	Cours de français. Ne cachant pas son (dés)intérêt pour la matière, Bob lit machinalement un texte de Voltaire.
10:12	-	C'est l'heure de la pause. Bob reconnait Alice dans la foule du hall de l'école. Ils en profitent pour discuter de leur plans du week-end.
14:15	-	C'est l'heure du sport. Après avoir rattrapé une balle décisive, Bob parvient à marquer le point qui rapporte la victoire à son équipe.
18:15	-	Cours de musique. Bob travaille ces gammes mineures au piano. C'est en progrès, mais il y a encore du travail.
19:30	-	C'est l'heure du diner. Bob finit sa viande mais laisse de côté les endives qui ne sont pas à son goût.

Et demain, ça recommencera !

Prenons maintenant le temps de réfléchir un peu à cette journée typique. Plus particulièrement, via l'exemple de Bob ou votre propre journée, essayez de réfléchir à toutes les capacités que vous offre votre corps dans la vie de tous les jours. Par là, j'entends bien sûr les aptitudes que nous offrent nos sens qui sont au nombre de 5 : **la vue, l'ouïe, le toucher, l'odorat et le goût**.

Ça sera votre premier exercice : Prenez 5 minutes à tout ce que le corps humain est capable de comprendre via ces 5 sens !

On peut analyser plus en détail la journée de Bob via ces 5 sens :

Secret (cliquez pour afficher)

- **07:00 -** Le son du réveil a permis à Bob de savoir qu'il était l'heure de se lever. Pourtant le son de l'hélicoptère, une heure plus tôt, ne l'a pas vraiment réveillé.
- **08:10 -** En utilisant sa vue, Bob parvient reconnaitre les caractères d'un texte. Son cerveau fera le travail nécessaire pour convertir ça en phrases et en idées compréhensibles. Tant que ce n'est pas écrit en chinois bien sûr !
- **10:12 -** Pour reconnaitre Alice, Bob a su utiliser ses capacités visuelles pour distinguer les corps en mouvement dans le hall et reconnaitre son visage au milieu de la foule. Ensuite, leur communication est passée par un échange entre production de parole par le canal vocal et reconnaissance de la parole via l'audition.
- **14:15 -** Les capacités visuelles de Bob ont été mises à l'épreuve. Elles lui ont permis de suivre et d'estimer les mouvements de la balle pour choisir les meilleurs gestes à effectuer.
- **18:15 -** Encore une fois, l'oreille est utilisée mais dans un registre différent. Elle permet à Bob de faire attention au rythme et à la justesse des notes qu'il produit.
- **19:30 -** Et enfin le goût !

Cet exemple montre bien les capacités exceptionnelles qu'à le corps humain pour pouvoir comprendre le monde qu'il l'entoure. Il a su développer plusieurs outils, plusieurs organes lui permettant d'appréhender les phénomènes physiques environnants. Que sommes-nous capable de comprendre ?

- **Audition :** nous sommes capables de localiser de une à plusieurs sources sonores, et de porter notre attention sur l'une d'entre elles en ignorant les autres. Nous sommes capables de reconnaitre les sons qui nous entourent *(bruit de moteur, une porte qui claque, etc)*. L'oreille est la première étape dans la reconnaissance de la parole. Nous pouvons reconnaitre une personne simplement au timbre de sa voix. L'audition humaine est capable de comprendre la musique. Et plein d'autres choses encore !
- **Vision :** L'œil n'est pas en reste. Nous effectuons beaucoup d'actions grâce à lui. Nous pouvons voir et estimer les distances dans notre environnement. Nous voyons les couleurs, les arêtes des objets. Nous sommes capable de reconnaitre les objets *(Est-ce une chaise ou un fauteuil ?)*. Nous arrivons à suivre le mouvement des objets. La vision nous donne aussi la capacité de reconnaitre les visages des personnes, même si elles ont vieilli.
- **Toucher :** Il nous permet d'appréhender les gestes que l'on fait et d'avoir un retour sur les actions que l'on effectue. On peut savoir si un objet est piquant ou doux, s'il est chaud ou froid,...
- **L'odorat et le goût :** Ces deux sens nous donnent une image de la composition chimique de notre nourriture ou des objets qui nous entourent pour nous signifier leurs caractéristiques.

Très bien, l'homme est plutôt bien conçu pour capter l'information contenue dans le monde qui nous entoure. Mais qu'est-ce que ça à voir avec le traitement du signal ?

Un signal, des signaux ?

À ce point, vous pensez surement que je me suis trompé de titre et que je suis en train de me lancer dans un cours de biologie. Et bien non ! Et je vais faire le lien tout de suite.

Le corps humain est le meilleur outil de traitement du signal que vous connaissez !

Chaque jour de notre vie, nous passons notre temps à capter tous les éléments qui arrivent jusqu'à nous. On peut citer :

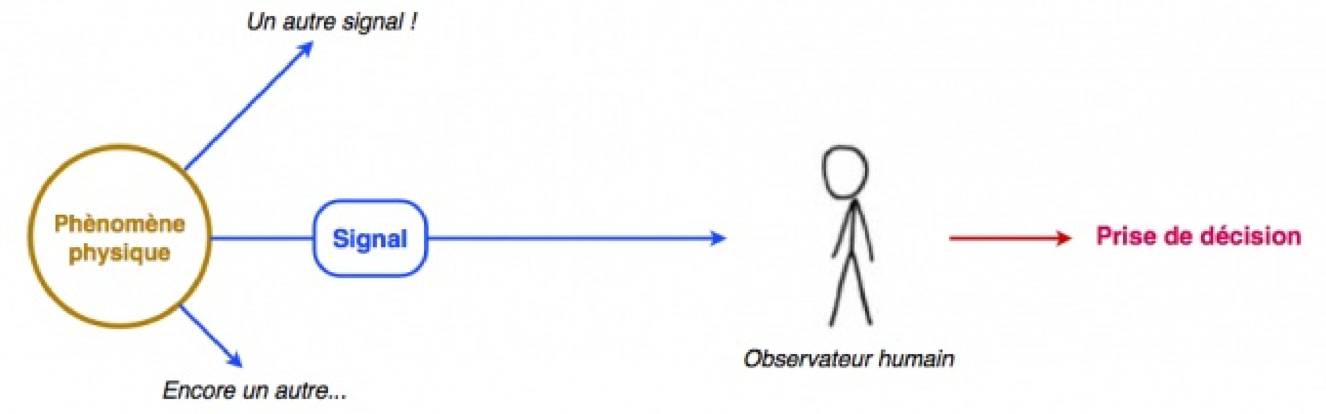
- la lumière ;
- les vibrations de l'air ;
- les composés chimiques ;
- la température ;
- les contacts avec notre peau.

À partir de ces seuls indices qui sont représentatifs des phénomènes physiques qui nous entourent, nous sommes capables de construire une représentation de notre environnement. C'est la somme de ces indices qui nous permet d'avoir suffisamment de matière pour pouvoir réfléchir et prendre des décisions pour interagir avec cet environnement.

Qu'est ce qu'un signal ?

Bien, je pense que vous commencez à voir où je veux en venir. Nous avons passé du temps à montrer que l'humain passe son temps à capter les signaux de son environnement.

Un **signal** est une grandeur qui est représentatif d'un phénomène physique.



Ce bonhomme est tiré de l'excellent web-comic xckd.com

Quand on se lance vers l'étude d'un phénomène physique, c'est en fait vers les signaux qui portent les grandeurs physiques qu'on va se tourner.

Mais qu'est ce qu'on y gagne à observer des signaux ? Par exemple, entre regarder à l'est tous les matins à 6h pour voir le soleil se lever et regarder la couleur des nuages dans le ciel, au delà de la poésie de l'exercice, qu'est ce qui est le plus intéressant pour vous ?

Je pense qu'à moins d'une guerre thermonucléaire spatiale, vous êtes quand même à peu près sûr que le soleil se lèvera tous les matins. C'est un phénomène cyclique que vous avez déjà observé et le revoir ne vous apportera pas de nouvelles **informations**. Par contre, observer la couleur des nuages vous apportera une **information** sur le temps qu'il va faire dans les prochaines heures. Vous pouvez penser qu'il est probable qu'il va pleuvoir dans deux heures. Vous chercherez alors d'autres indices comme l'évolution de la température, du vent, de l'humidité,... qui vont permettront d'affiner la probabilité de votre hypothèse. Vous pouvez aussi tout simplement aller chercher des **informations** sur le site de Météo France.

Dans cet exemple qui peut sembler anodin se cache un mot central en traitement du signal : c'est le mot **information** ! Si on prend le temps de capter et de décortiquer les signaux, c'est pour une bonne raison. C'est qu'il y a quelque chose d'intéressant dedans !

Par exemple, pour parler, nous avons appris depuis 8000 ans à utiliser nos cordes vocales, notre bouche, notre langue,... pour pouvoir faire vibrer l'air. On a associé chacune des différentes vibrations à une lettre, une syllabe pour pouvoir construire des mots, des phrases et donc des idées et des propos qui sont porteurs d'**informations**. Bien sûr dans le cas de la parole, il n'est question de convention et on le voit bien avec la diversité des 7000 langues qui composent l'univers linguistique de notre monde.

Pour une station météo, les variations de l'humidité et de la température sont porteurs d'**informations** car ils vont permettre, à partir d'expériences déjà arrivées dans le passé nous donnant un à-priori sur le système physique (ici les phénomènes atmosphériques), de prédire son comportement futur.

Vous voyez bien qu'on n'étudie pas un signal par hasard. On y cherche toujours quelque chose !

N.B : Vous avez peut-être vu aussi que j'ai utilisé les mots "probable" et "probabilité" : nous verrons plus tard que la notion d'information est intimement liée à la notion de probabilité. Des maths, toujours des maths !

En tout cas, cette notion est très importante à retenir et est fondamentale dans les problématiques de traitement du signal : **un signal contient de l'information**. Pour bien que vous le reteniez, en voici une notation pseudo-mathématique !

$$\boxed{\text{Information} \subset \text{Signal}}$$

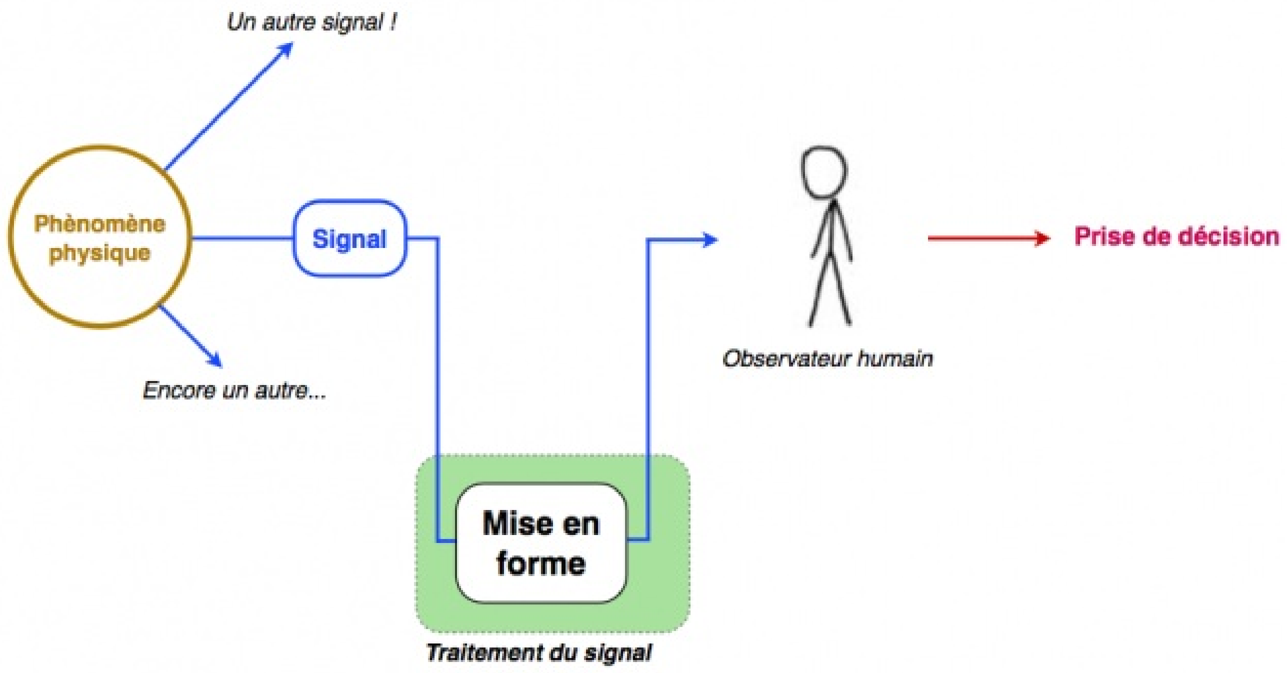
Je veux que vous graviez ça dans votre tête !

Qu'est ce que le traitement du signal ?

Le traitement du signal est donc la discipline scientifique qui développe les outils et techniques permettant de manipuler et de comprendre les signaux. Je pense qu'on peut tenter de le résumer autour de quatre grandes lignes directrices :

Transformer un signal

On l'a vu, le plus gros travail est donc de réussir à **sortir l'information du signal**. C'est ça qui nous intéresse, mais ce n'est pas toujours une tâche facile, suivant ce que l'on cherche et dans quel milieu on se trouve. Si on reprend notre schéma de tout à l'heure, on pourrait le modifier comme ça :



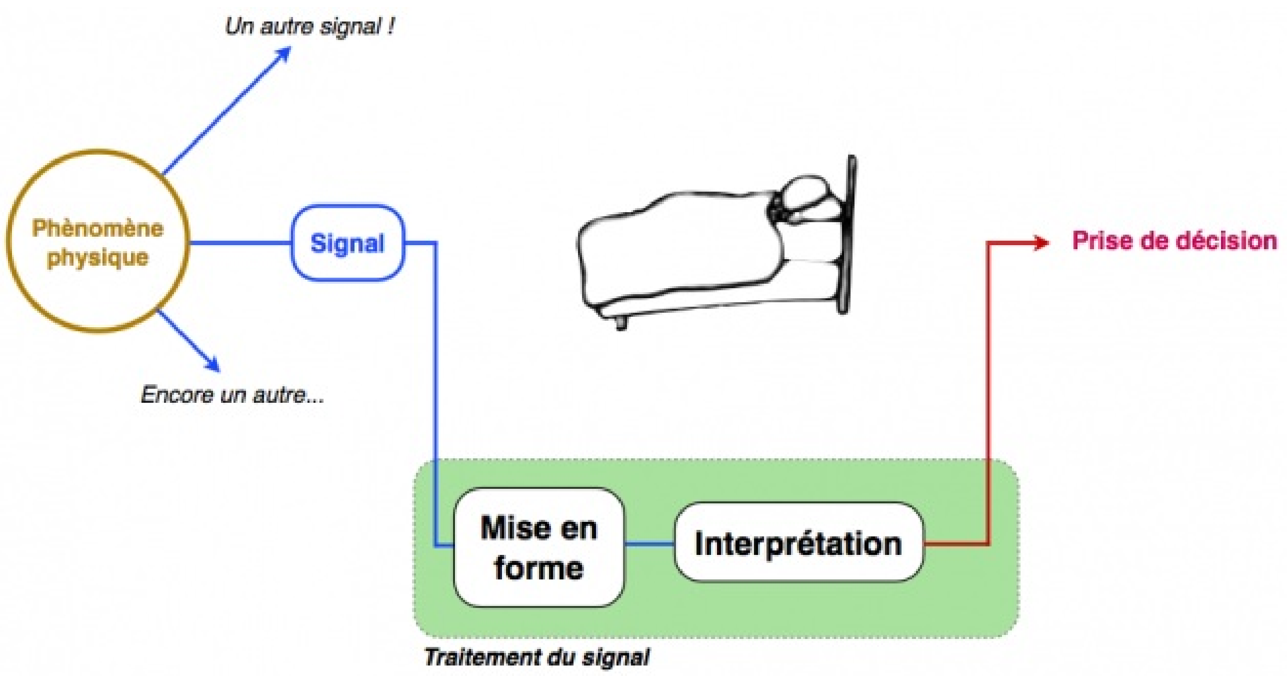
La "mise en forme" est une étape qui se place entre la grandeur physique et l'observateur. Mettre en forme ou transformer permet de faire apparaitre le signal sous un autre angle ou en tout cas un meilleur point de vue pour l'observateur. On peut :

- changer sa représentation pour mieux faire ressortir certaines de ces caractéristiques ;
- éliminer certains effets non désirés (de l'écho dans un son, des grisaillements dans un signal électrique, etc) ;
- ...

Cette mise en forme permet donc de mieux cerner les signaux. Un humain qui les observe pourra donc prendre des décisions en étant sûr de faire moins d'erreurs à cause d'un élément du signal non aperçu ou corrompu.

Analyser un signal

On peut mettre en forme un signal pour qu'il soit plus adapté pour une évaluation humaine, mais on peut aller plus loin, non ? On ne peut pas être derrière chaque machine pour les aider. Il y a des comportements qu'on aimerait bien automatiser ! Rajoutons ça dans notre schéma :



Après l'étape de mise en forme, on rajoute une étape d'analyse qui a pour but de **comprendre** le signal. Les objectifs sont divers et variés suivant les applications. À ce point, on a un système qui peut fonctionner seul sans intervention humaine. Il arrive à comprendre les phénomènes physiques qui l'entourent et prendre des décisions en retour.

La prise de **décision** en aval ne fait en soi pas partie du traitement du signal. C'est le système qui décide des actions à effectuer ; on commence à tomber dans le domaine de l'intelligence artificielle (qui est tout aussi passionnant).

Créer un signal

Le traitement du signal, c'est aussi être capable de créer ces propres signaux. Les conditions de l'émission et la connaissance de la physique de l'environnement dans lequel on veut propager notre signal permettent d'adapter au mieux nos signaux pour qu'ils puissent être transmis, manipulés, compris,... le mieux possible, c'est à dire sans **dégradation de l'information** contenu dans le signal.

- Quand on parle, on crée un signal qui va se propager dans l'air. Si il y a du vent ou qu'on est en discothèque, on se mettra à parler plus fort pour être sûr qu'on nous entende. Le fait d'adapter le volume de sa voix permet de s'assurer que tout notre message (qui contient l'information) sera transmis à notre interlocuteur.
- Dans un clavier, quand le pianiste appuie sur une touche, il est important de créer en temps réel la bonne note *(qui est un signal)* en réponse. Et si pour son solo, notre pianiste veut un petit effet chorus, le signal passera un filtre spécial avant d'être transmis aux haut-parleurs.
- Pour la retransmission d'une émission à la radio, le signal doit être transmis dans la bande passante centrée à la bonne fréquence. Ça serait bête de retrouver France Culture à la place de Hot Radio !

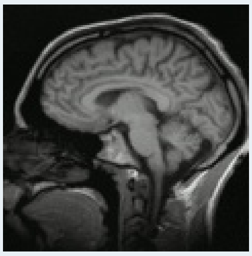
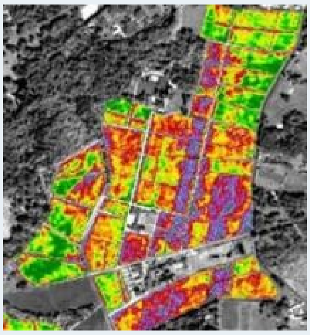
Transmettre un signal

Il y a de nombreux cas où on peut s'intéresser à transporter et à transmettre des signaux à des humains, des ordinateurs,... Entre l'émetteur et le récepteur, il n'y a pas de vide. La communication se fait sur un support. Parfois, on ne le maitrisera pas et on s'adaptera au mieux comme par exemple dans le cas d'une communication entre une antenne et un téléphone portable où le signal est transmis dans l'air rempli de désagréments (immeubles, intempéries, ionosphère,...). Dans d'autres cas, on maitrise le canal de communication car c'est une création de l'homme. À ce moment-là, on peut le dimensionner pour qu'il convienne au mieux à nos signaux (fibre optique, liaison HDMI, câble de cuivre pour la téléphonie fixe,...). Cette notion de transmission est très liée avec les notions de *création* et de *transformation*. On peut remodeler nos signaux pour qu'ils soient le plus adaptés possibles au canal de communication dans lequel ils vont être lancés.

Champ d'applications

Traitement d'images

Fonction	Résumé	Exemple
Système ROC	Les systèmes de reconnaissance automatique de caractères permettent à partir d'une image d'un texte manuscrit de reconnaitre la forme des lettres et des mots pour pouvoir retranscrire le texte contenu dans l'image en un texte compréhensible par un ordinateur.	On retrouve ces systèmes : • **à la Poste** pour pouvoir lire les adresses sur les enveloppes • **dans votre scanner** pour transcrire une lettre manuscrite dans votre éditeur de texte préféré • **dans Google Books** pour numériser les livres sous forme de grandes bases de données informatiques
		C'est utile pour : • la mise au point automatique sur des **appareils photos ;**

Détection de visages	La reconnaissance faciale permet, dans une image ou une vidéo, de détecter la présence d'un ou plusieurs visages humains. Il est aussi possible de reconnaitre et de distinguer des visages déjà appris par le système grâce à une base de données.	• des applications de **télé-surveillance** ; • de l'**indexation** d'images dans des bases de données d'images ; • permettre à des **robots** d'interagir avec des humains (détection de présence, évaluation de l'âge, du sexe, de l'expression faciale, de la direction du regard,...).
Imagerie par résonance magnétique	Les médecins utilisent des machines IRM en forme de tunnel pour avoir un aperçu de l'intérieur du corps humain.Le principe est basé sur les propriétés quantiques des atomes en réponse à un champ magnétique. L'interprétation des signaux du champ magnétique et la reconstruction de l'image utilisent les outils classiques de traitement du signal.	
Photo satellite	Les satellites font partie des systèmes de télédétection qui permettent d'acquérir des informations sur un système physique sans contact. Ils utilisent les rayonnements électromagnétiques sur une large bande passante *(multi- and hyperspectral imaging)* pour créer des images de la surface terrestre. Elles permettent par exemple de détecter automatiquement la présence de minerais, de forêts, de zones habitables ou de tirer des informations sur les fonds marins.	

Traitement audio

Fonction	Résumé	Exemple
Chaîne Hi-Fi	Voilà un objet commun de notre vie culturelle depuis des dizaines d'années ! La conception des systèmes électroniques de la chaîne (égaliseur, filtre, étage d'amplification,...) font appel à des notions de traitement du signal pour pouvoir manipuler de la meilleure façon les signaux audios.	
Reconnaissance de la parole	L'objectif est simple mais la tâche est ardue. L'idée est de créer des systèmes capables d'identifier les mots et les phrases d'un discours humain pour ensuite créer des commandes vocales, donner à des robots des facultés auditives, etc.	Allez sur une vidéo Youtube. Si vous cliquez sur l'onglet CC puis "transcrire la piste audio", vous verrez s'afficher des sous-titres qui sont générés par le système de reconnaissance vocale de Google.
		Vous pouvez aller tester quelques

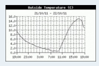
Production synthétique de la parole	Comme dit plus haut, le traitement du signal c'est aussi la production de signaux. Et un large pan de la recherche a été consacré à la production de parole par ordinateur. À partir d'un texte donné, on tente de produire une version audio de ce texte.	démos en ligne. Sinon ce type de système trouve sa place dans : • **l'aide aux personnes malvoyantes** pour lire le contenu d'une page web par exemple ; • **l'aide aux personnes muettes pour leur donner la possibilité de parler ;** • les **interfaces hommes-machines** telles que les serveurs vocaux, les bornes de paiement, les jeux vidéos, etc.
Synthèses de filtres par DSP	Les DSP sont des processeurs optimisés pour la rapidité de calcul et construits dans le but de faire du traitement *numérique* du signal. Leur architecture leur permet de traiter rapidement des signaux en restant à bas coût et sans apport d'énergie énorme, ce qui en fait des candidats idéaux pour des systèmes embarqués.	Vous utilisez quotidiennement des DSP dans : • vos **modems** (ADSL, RTC, etc) ; • les **téléphones portables** pour la réception/émission par l'antenne ; • vos **baladeurs MP3** pour traiter facilement vos fichiers audio (lecture, égalisation, etc) ; • les récepteurs **GPS** ; • les **claviers-synthétiseurs** pour créer des bancs de filtres permettant de jouer tous les sons que vous voulez (orgue, piano, jazz, distortion, etc).
Séparation de sources sonores	L'objectif est de réussir à séparer les contributions de différentes sources sonores qui arrivent en un point, en utilisant un ou plusieurs microphones. On peut ainsi tenter de séparer le discours de deux personnes qui parlent en même temps, ou des différents instruments qui constituent un groupe de musique.	Voici un exemple audio provenant des travaux du CNL à San Diego. À partir de l'enregistrement de deux microphones dans une pièce où un homme parle avec de la musique en fond : • Microphone 1 • Microphone 2 un algorithme de séparation de sources aveugle permet de distinguer les deux sources. Voici la voix extraite des pistes audios précédentes. D'autres exemples ici.

Communications

Fonction	Résumé	Exemple
Compression de la parole	Depuis 15 ans, nous avons quasiment en main des téléphones portable. La transmission du signal de parole, dans sa version brute, serait quasiment impossible sans des algorithmes de compression. Transmettre un signal demande un certain débit sur le réseau. Si aujourd'hui, nous arrivons à téléphoner en simultané sur les réseaux téléphoniques sans soucis, c'est grâce au traitement du signal qui permet de réduire la place occupé par le signal sans (trop) dégrader l'information portée par notre discours.	Il existe une grande diversité de techniques de codage de la parole. Les codeurs d'ondes, utilisant par exemple les méthodes PCM ou ADPCM. D'autres techniques, telles que l'algorithme CELP, utilisent un codage basé sur le modèle de perception de la parole.
		• Image : JPEG, JPEG2000

Compression de fichiers informatiques	De même, en informatique, la place qu'occupe un fichier a toujours été un problème à cause de la taille limitée des supports de stockage et de la bande passante disponible sur les réseaux. Il existe aujourd'hui des dizaines d'algorithmes de compression pour gagner de la place. Chaque algorithme est bien sûr pour ou moins adapté suivant le type de fichier (texte, audio, vidéo, etc).	• **Image :** JPEG, JPEG2000, PNG, etc. • **Vidéo :** MPEG-2, H.264, Theora, etc. • **Audio :** MP3, WAV, AAC, OGG, etc. • **Autres :** zip, rar, gzip, etc.
Réseau GSM (Téléphonie mobile)	Comment encoder la voix ou les SMS ? Comment faire passer plusieurs communications sur une même antenne ? Comment prendre en compte les réflexions multiples des signaux sur l'environnement ? Autant de questions qui trouvent des réponses dans le traitement du signal.	

Et encore plein d'autres !

Fonction	Résumé	Exemple
Cours de la bourse	Les signaux peuvent être aussi biens naturels que complétement artificiels. Les outils mathématiques de traitement du signal sont utiles en finance pour interpréter et comprendre les cours boursiers.	
La température de votre ville	Température, pression, humidité, vitesse du vent,... Autant de phénomènes physiques et autant de signaux à capter en différents points du globe. Ils apportent l'information suffisante aux instituts météorologiques pour comprendre et prévoir les phénomènes météorologiques journaliers.	
Le radar	Typiquement, une des premières applications très concrète du traitement du signal. Popularisé à partir de la seconde guerre mondiale, le principe du radar est assez simple . On émet une onde de forme connue dans l'air, les réflexions de cette onde sur les carlingues captées par le radar permet de détecter la présence d'un avion. Dans un environnement qui comporte de nombreux échos parasites (sol, mer, turbulences, ionosphère, précipitations, etc), les outils du traitement du signal permettent d'améliorer la fiabilité des principes de détection.	
Activité du cerveau	L'électro-encéphalographie (EEG) est une méthode d'exploration cérébrale qui permet de mesurer l'activité électrique du cerveau par un réseau d'électrodes placé sur la tête. L'enregistrement des signaux peut être amélioré grâce au traitement du signal (détection d'artefacts, rehaussement par filtrage, analyse par ondelettes,...)	

La liste est loin d'être finie ! Le champ d'applications est immense. Il est intéressant de voir que le traitement du signal est un domaine qui ne reste pas seul dans son coin, mais qui au contraire va plutôt vivre en symbiose avec tous les domaines scientifiques et techniques qui ont besoin d'outils pour analyser et produire des signaux.

Des signaux à tous les étages

Dans le chapitre précédent, nous avons pris le temps de bien comprendre ce qu'est le traitement du signal et ses applications.

À partir de maintenant, nous allons mettre les mains dans le cambouis. Et on va tout de suite définir ces signaux dont je vous parle depuis le début sans vous dire vraiment à quoi ils ressemblent. Nous verrons aussi la notion d'énergie associée à un signal.

En quelle dimension ?

Un signal, un signal, un signal,...

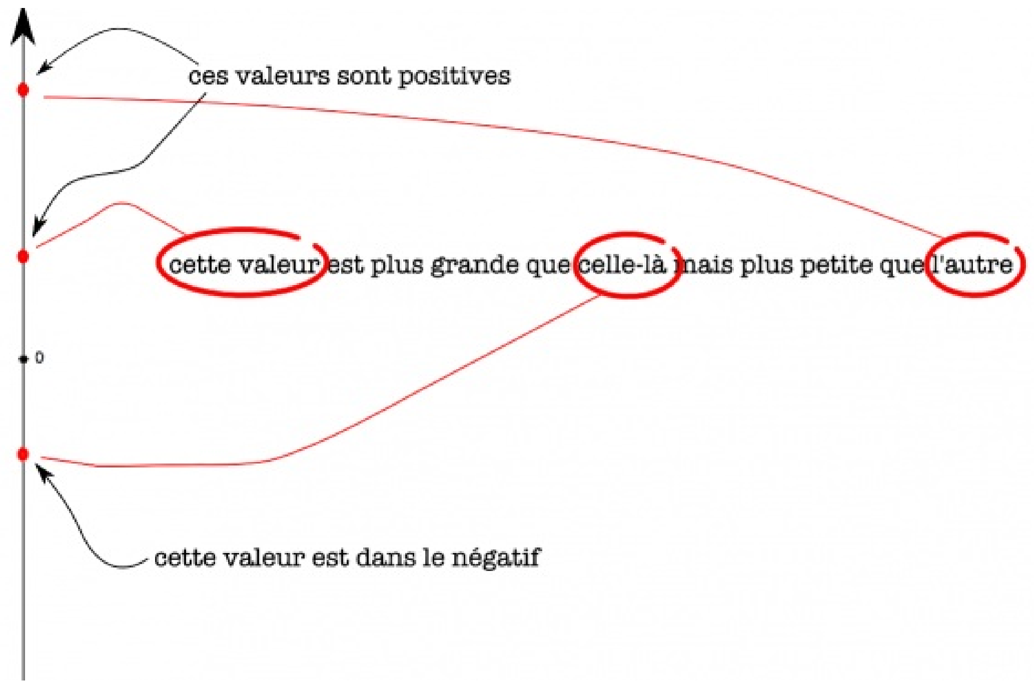
Nous allons construire notre premier signal. Reprenons du début, nous avions dit qu'un signal est représentatif d'une grandeur physique.

Citation : Wikipédia

> On appelle grandeur physique toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre généralement accompagné d'une unité de mesure.

Notre grandeur est donc quantifiable par un nombre. C'est une bonne chose, il serait par exemple difficile de faire des calculs sur des température définies par des mots (chaud, froid, glacial,...). D'ailleurs quel serait le résultat de $3 \times \text{glacial} + \text{tiède}$? Il est quand même plus pratique de manipuler des nombres suivant une convention qu'on connait. Si il fait $20\,^\circ C$, une augmentation de $3\,^\circ C$ fera qu'il fera $20 + 3 = 23\,^\circ C$. Easy, isn't it ?

Le signal est donc représenté par le biais de nombres. Quoi de mieux qu'un axe pour représenter différents nombres ?

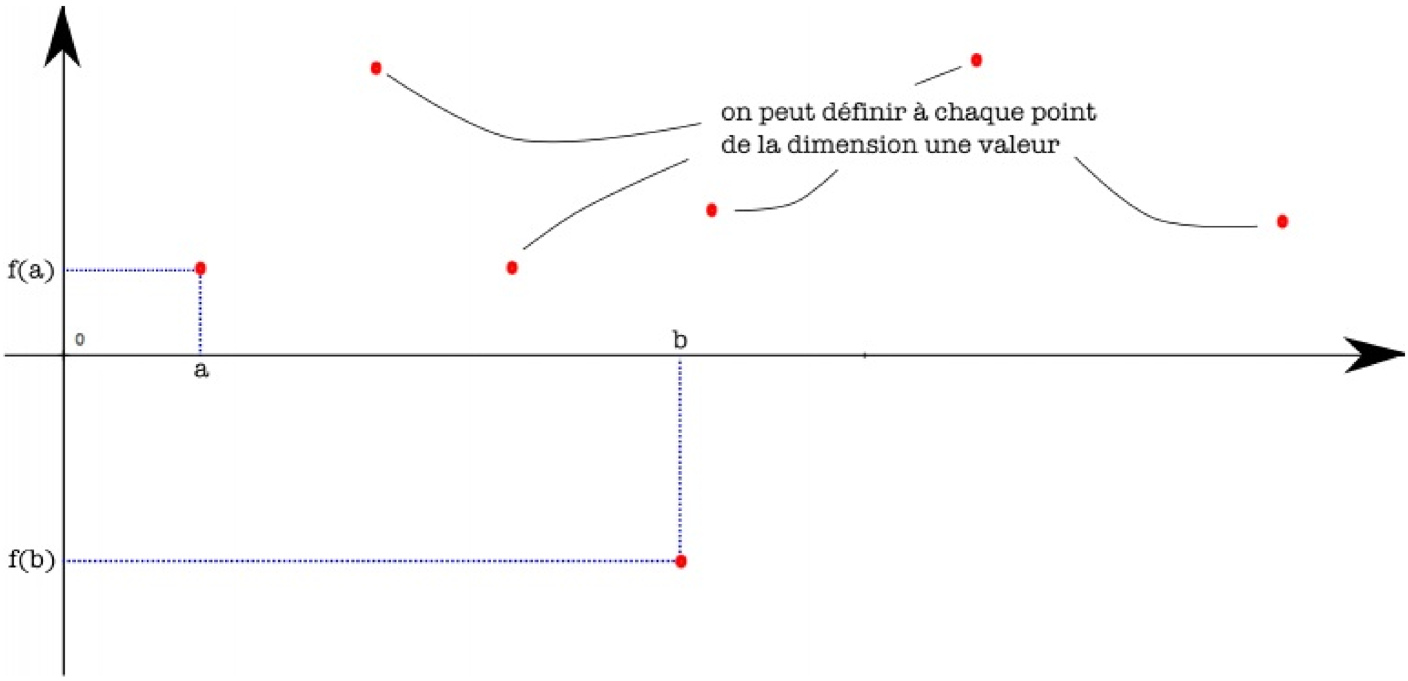


Un point *(ici les 3 en rouges)* représente un nombre. Sa valeur est représenté par la position du point sur l'axe. Après, à vous de graduer comme bon vous semble votre axe du moment que c'est cohérent !

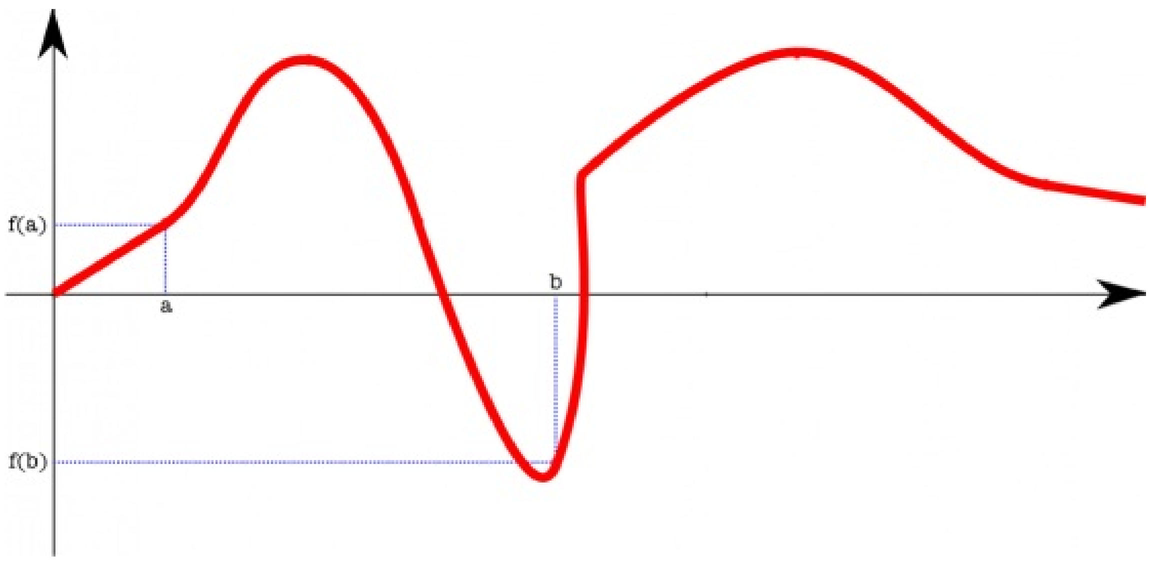
La première dimension

Est ce qu'on peut définir **tout** un signal par un seul nombre ? Non, me diriez vous. Et vous auriez raison. Ce qui porte vraiment l'information, c'est la variation de cette valeur. Pour reprendre l'exemple de la température, on va s'intéresser à sa valeur à différents moments de la journée. On construit donc un signal à partir de la variation de notre grandeur physique. Mais par rapport à quoi ? C'est à vous de voir ! Dans la majorité des cas, ça sera le temps ; mais ça peut très bien par rapport à une longueur, un angle, une température, une fréquence, etc.

Quand la variation du signal ne dépend que d'une variable, on parlera de signal unidimensionnel. Notre signal est construit dans un espace à une dimension. Et un nouvel axe va venir porter cette dimension.



On peut donc pour chaque point de notre dimension associer une valeur à notre grandeur physique. En le faisant tout le long de la dimension, on peut construire des choses comme ça :



Et voilà notre premier signal !

Est ce que ça ne vous rappellerais pas un peu vos cours de maths ? Et si j'écris ça ?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

Et oui ! On peut voir les signaux comme des fonctions mathématiques. Ça correspond exactement à ce que je vous ai dit. Pour chaque point de la dimension (i.e. x), on associe une valeur (i.e. $f(x)$). On peut donc voir la fonction f comme étant notre signal.

Vocabulaire : La valeur de la grandeur physique en un point est appelé **amplitude**.

Vous remarquerez que les ensembles d'arrivés et de départs sont $\mathbb{R}$. Ça veut dire deux choses :

- qu'on peut récupérer la valeur de notre grandeur physique à n'importe quel instant et avec n'importe quellle précision (par exemple $f(3,4)$ ou $f(34243,41267443674395389 14)$
- que notre grandeur physique peut prendre une infinité de valeurs, c'est à dire avec la possibilité de tendre vers l'infini et d'être définie avec une précision infinie (peut-être que $f(3) = 0,3$ ou $f(3) = 0,1278654954730$

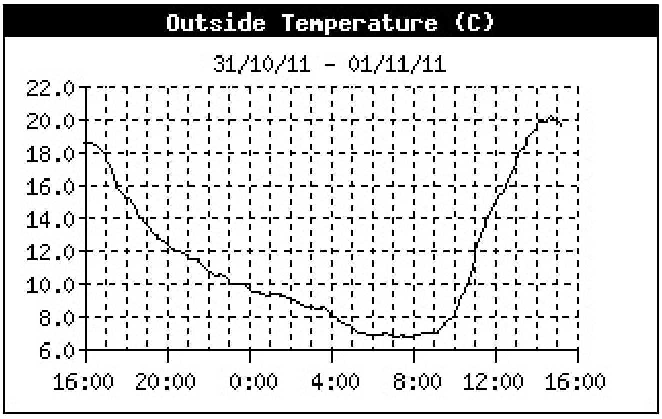
C'est plutôt une bonne description des signaux qui nous entourent. Mais nous verrons que ça va nous amener assez rapidement quelques petits problèmes pour des applications concrètes !

En tout cas, c'est une très bonne nouvelle car on va pouvoir utiliser plein de résultats de mathématiques pour manipuler et comprendre nos signaux. On va pouvoir faire de l'analyse, du calcul intégral, du calcul matriciel, des développements en sé... Eh non, partez pas, revenez !

Et si je vous montrais des vrais signaux ?

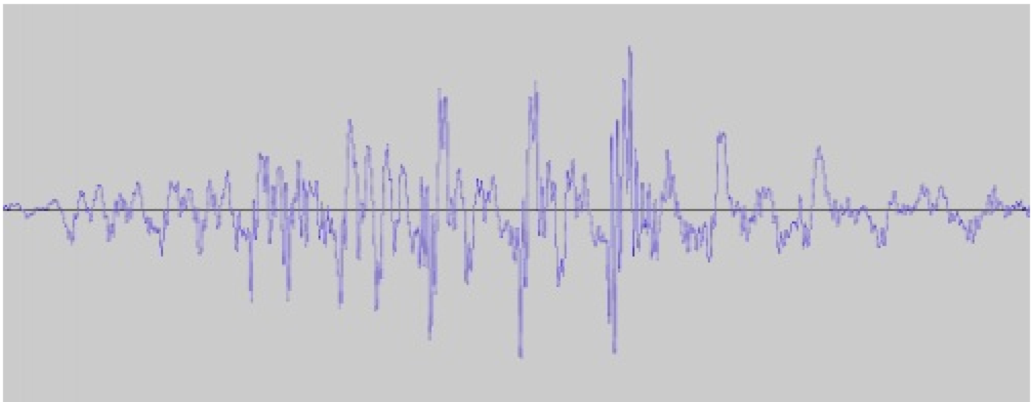
Voici la température d'une station météo un jour de novembre.

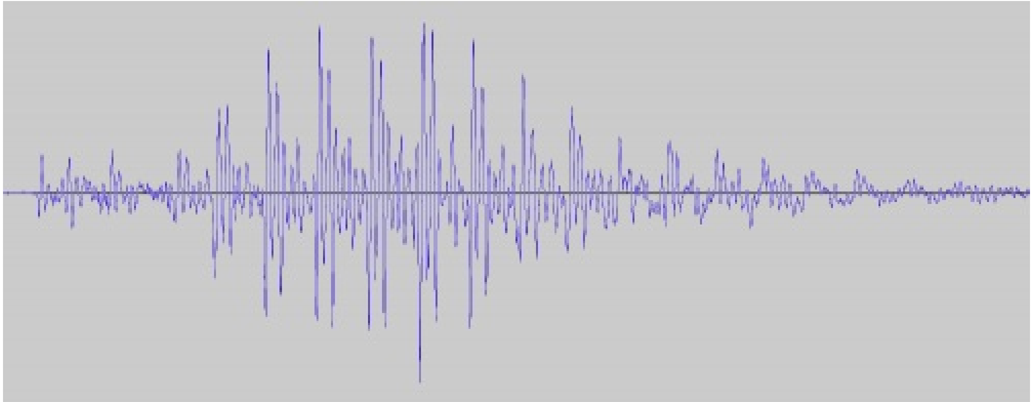
- **Grandeur physique :** température en degrés
- **Dimension :** le temps



Sur ces deux images, on a la représentation de deux sons. C'est moi-même en train de dire la voyelle 'a' et la consonne 'r'.

- **Grandeur physique :** un signal électrique proportionnel à la vibration de l'air.
- **Dimension :** le temps





Je vous ai dit qu'on pouvait voir les signaux comme des fonctions. Dans un monde mathématique parfait où les licornes créent des arcs-en-ciel*, c'est vrai. Mais concrètement, il est très difficile pour ne pas dire impossible de trouver la forme analytique d'un signal. On ne travaille donc en fait qu'avec les images de ces fonctions, c'est à dire qu'on récupérera, grâce à nos systèmes de mesure, un maximum de couples $\left(x,\ f\left(x\right)\right)$ qui caractérisent le signal. Mais ne vous inquiétez pas, il y a de quoi faire.

(*): À moins que ça soit 'Mon Petit Poney'...

Une dimension de plus !

Pour le moment, notre signal n'a qu'une seule dimension, mais on pourrait en rajouter une, non ?

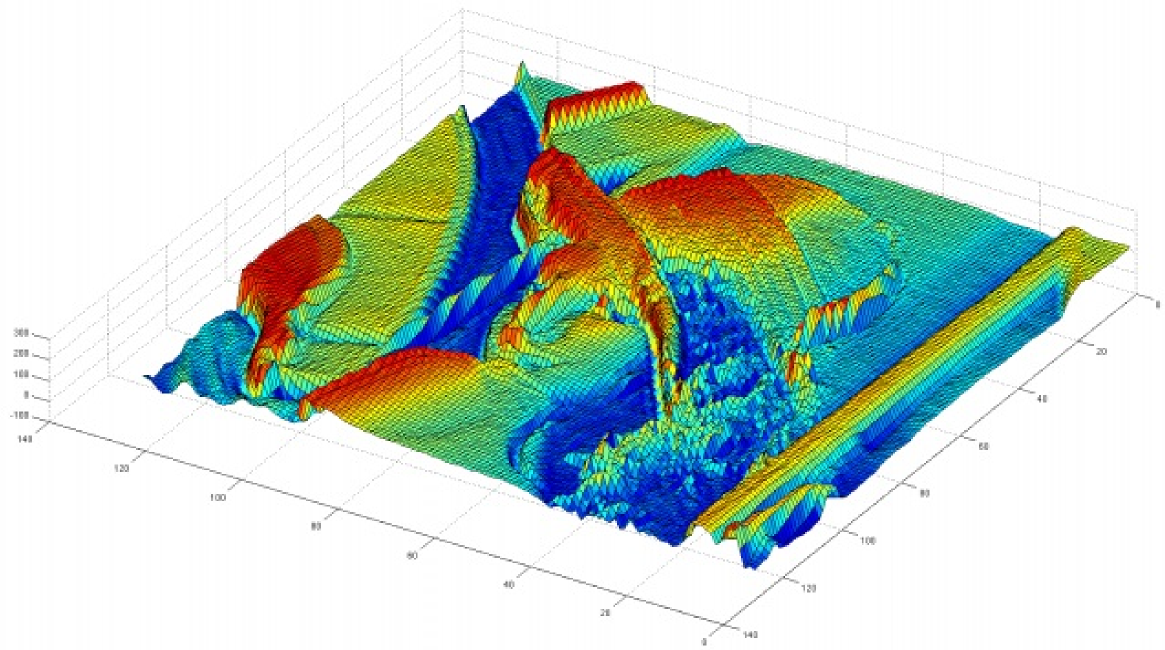
Si vous ne me croyez, je vous donne tout de suite un exemple de **signal bidimensionnel** :

Si vous croyez que je me fiche de vous, réfléchissez y encore une fois ! Finalement, le pixel d'une image est représentatif d'une grandeur physique : l'intensité lumineuse. Pour une image comme ci-dessus, ça correspond au niveau de gris (plus la valeur est grande, plus le gris devient clair et inversement ; les bornes étant le noir et le blanc). Pour les images en couleurs, c'est juste 3 grandeurs physiques (rouge, bleu, vert).

Et les deux dimensions ? Et bien, c'est seulement la largeur et la hauteur de l'image. Pour retrouver la position d'un pixel, il suffit de connaitre son numéro de ligne et de colonne. On peut donc voir une image comme une fonction mathématique à deux variables :

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Si vous n'êtes pas convaincu, voilà une autre représentation de l'image :



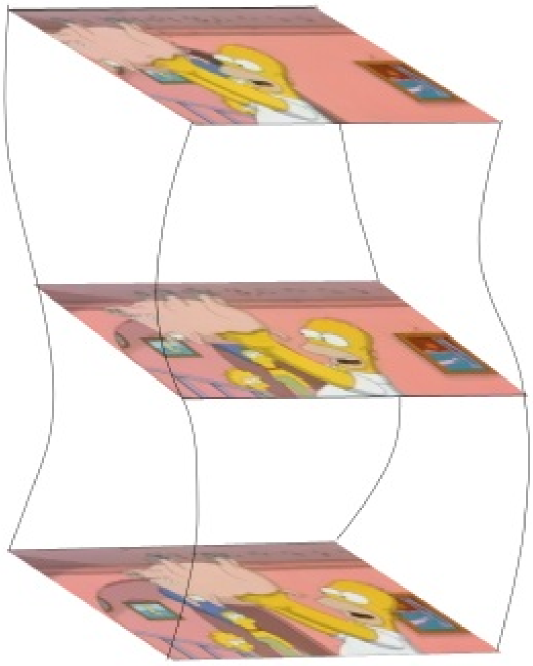
On voit bien que l'image peut se représenter comme une fonction mathématique qui peut s'étendre sur deux dimensions.

L'exemple de l'image est le plus frappant pour le signal dimensionnel, mais il y en a plein d'autres. Par exemple, si je mesure l'évolution de la température au cours du temps en différents points d'une barre de métal, j'ai un signal bidimensionnel :

- **Grandeur physique :** température en degrés
- **Dimension n°1 :** la position sur la barre
- **Dimension n°2 :** le temps

Encore une autre...

Pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Rajoutons encore une dimension.



Une vidéo est l'exemple typique d'un signal tri-dimensionnel. C'est finalement un simple enchainement de signaux bidimensionnels (i.e. les images) au cours du temps :

- **Grandeur physique :** intensité lumineuse
- **Dimension n°1 :** position sur la hauteur de l'image
- **Dimension n°2 :** position sur la largeur de l'image
- **Dimension n°3 :** le temps

Pour les autres dimensions, je me permettrais de citer un grand homme :

"Vers l'infini et au-delà"

Buzz l'éclair (1995)

Le mot de la fin

Vous avez peut-être l'impression qu'on a enfoncé des portes ouvertes en parlant simplement de fonctions, mais je voulais prendre le temps de construire cet outil qui est à la base du traitement du signal. Quelque soit le signal, quelque soit son origine, sa valeur maximale, sa durée,... on pourra finalement le représenter sous la forme d'un objet mathématique qu'on maitrise complément. C'est là la force du traitement du signal : **être capable de donner des outils mathématiques capable de gérer avec tous les types de signaux**.

La nature des signaux

La périodicité

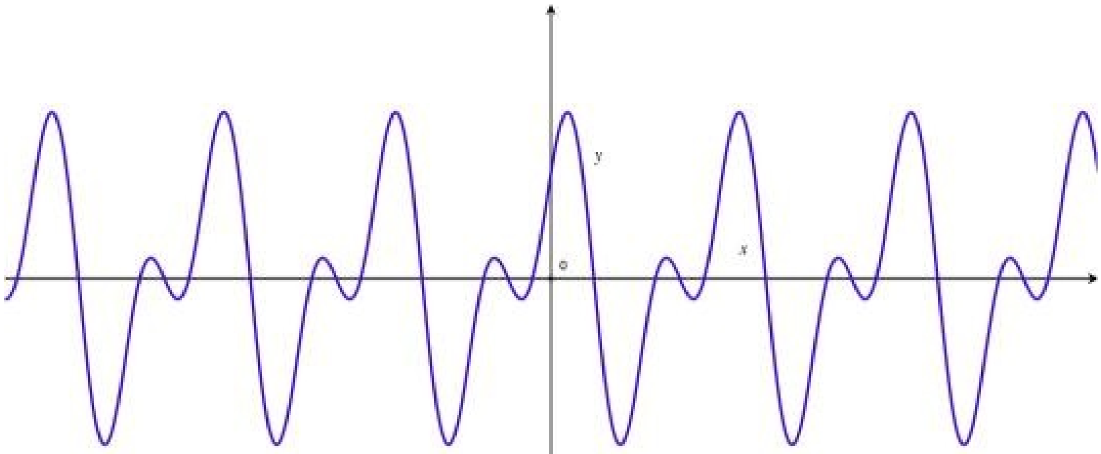
Qu'est ce que la périodicité ? Et plus précisément, qu'est qu'un signal périodique ? On peut écrire la définition mathématique :

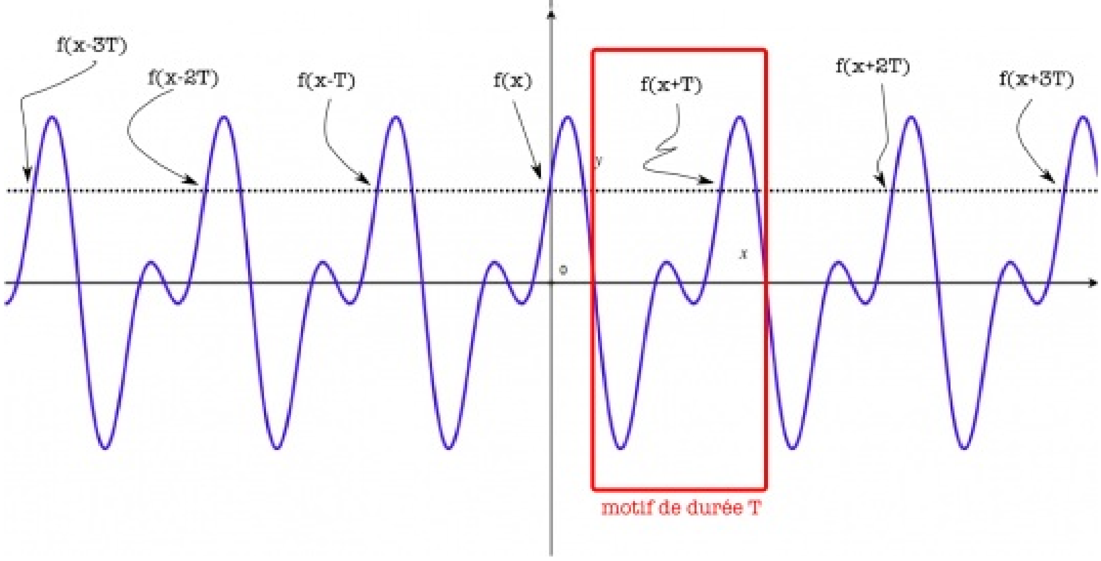
$$\exists T \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f(x) = f(x + kT)$$

D'accord. Si vous n'en n'avez pas saisi le sens, je peux vous l'écrire en français :

Un signal est dit **périodique** si et seulement si la variation de son amplitude répète un même motif suivant une période T

Et comme il n'y a rien de mieux qu'un schéma, prenons un signal périodique :





On voit bien les deux définitions équivalentes que je vous ai données : la répétition d'un même motif suivant une période T, ou la valeur de l'amplitude qui est égale à tous les multiples de la période T.

Plutôt que période, vous avez surement du plutôt entendre parler de fréquence d'un signal (sonore par exemple). Les deux notions sont liés par une égalité très simple :

$$T = \frac{1}{f}$$

où T est la période en secondes et f, la fréquence du signal en Hertz ou s^{-1}.

Mais ne nous attardons pas là-dessus, nous reparlons de fréquences plus en profondeur très bientôt. J'aimerais mettre l'accent sur une notion particulière. Reprenons notre dernière définition mathématique et déroulons-là en faisant varier k dans $\mathbb{N}$:

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = ... = f(x+34565T) = ...$$

Et n'oublions pas les entiers négatifs :

$$... = f(x-300T) = ... = f(x-2T) = f(x-T) = f(x)$$

La définition mathématique du signal périodique entraine que le signal doit être défini sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet si le signal n'est pas défini au point, par exemple, $x + 400T$ alors la définition du signal périodique tombe à plat car $f(x) \neq f(x) = f(x+400T)$

Un signal périodique est donc défini sur un **support non borné**.
Expliquons ces deux mots :

- **support :** intervalle des points où la fonction est définie
- **borné :** intervalle ayant des limites hautes et basses

Le signal périodique s'étend sur un support qui n'a pas de limites, et il peut donc tendre vers $-\infty$ et $+\infty$ sans soucis. D'un point de vue mathématique, il n'y a pas de problème et la définition est satisfaisante. Physiquement, c'est beaucoup moins convenable. Si on utilise ces fonctions périodiques pour tenter de modéliser nos signaux dans notre monde réel, on a un problème. Lequel ?

Faisons l'hypothèse un instant que tous les signaux qui nous entourent soient à support non borné. Cela voudraient dire que tous ces signaux existent depuis toujours bien avant le Big-bang et continueront bien après votre mort et la destruction de la planète Terre par les aliens. Donc le signal de votre voix ou d'une émission de radio existent depuis toujours ! Complétement contradictoire, non ?

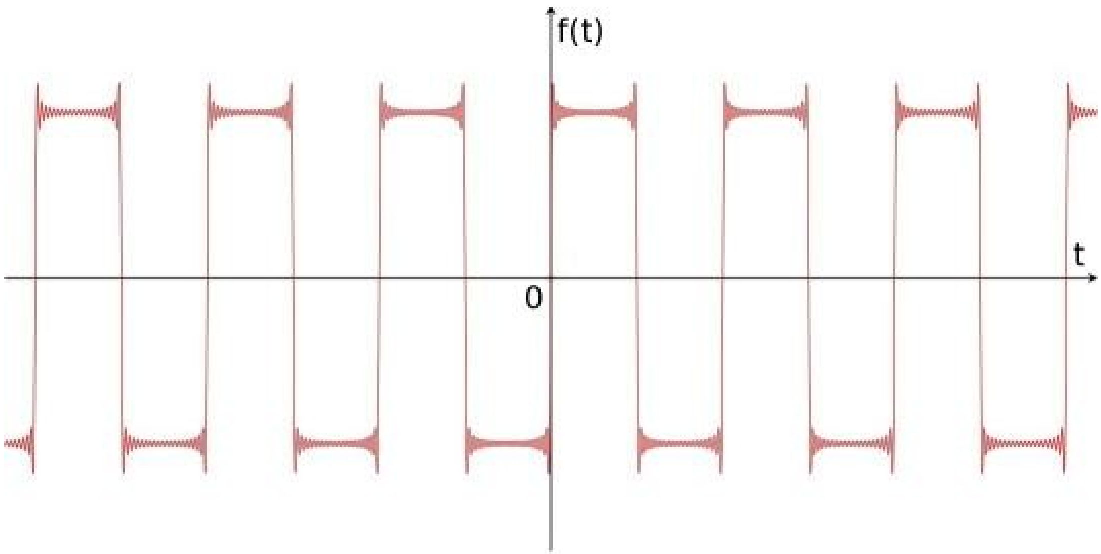
Cette simili-démonstration par l'absurde montre que nos signaux sont à **support borné**. Ils commencent à un moment donné et s'arrêtent à un autre et en fait plus important encore, **notre** observation de ces mêmes signaux ne peut durer qu'un temps fini !

Les signaux périodiques sont centraux dans la construction de la théorie mathématique du traitement du signal pour la modélisation des signaux, mais cette différence entre un monde mathématique où les outils peuvent être définis sur des supports non bornés et le monde physique où cette considération n'est plus valable va nous entrainer quelques soucis.

La causalité

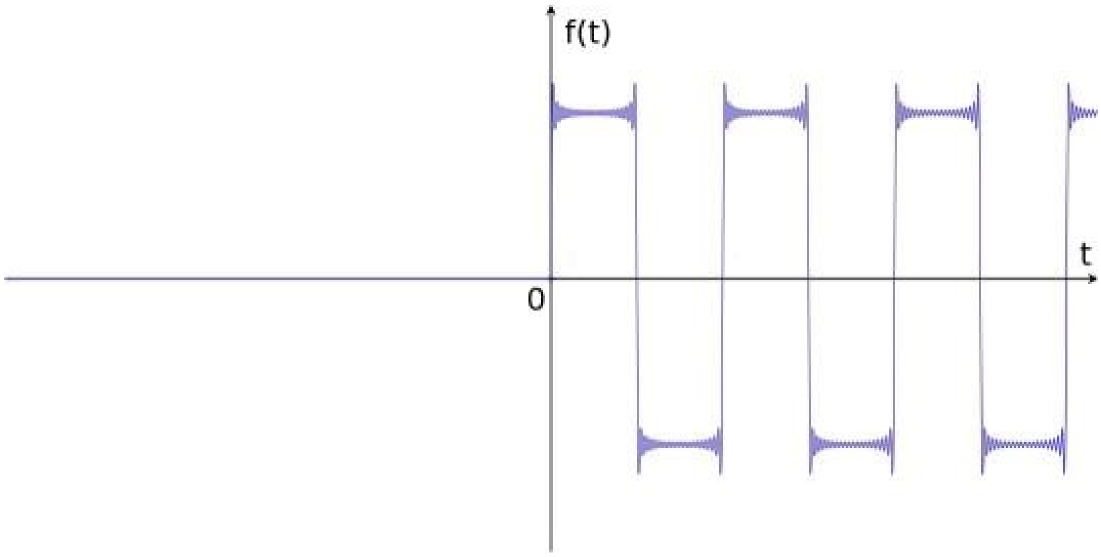
Causal. Voilà un mot qu'on entend peu, le dictionnaire le définira comme 'Qui implique une cause à un effet'. Ça n'a pas l'air au premier abord, mais il trouve tout son sens en traitement du signal.

Reprenons un signal quelconque :



Vous remarquerez que j'ai gradué l'axe des abscisses avec un zéro. Il peut vous semblez anodin, mais il n'en est pas moins important. J'ai dit dans un des points précédents que les signaux périodiques s'étendaient sur un support non borné et que physiquement, ça causait quelques soucis. La causalité entraine que le signal n'existe qu'à partir de ce zéro qui marque le début du signal. Il n'existe pas de façon magique depuis la nuit des temps, il a un début ! Il y a une cause qui a crée cet effet.

$$f(t) \text{ est causal} \Leftrightarrow \forall t < 0, f(t) = 0$$



Ce signal est causal, au contraire de sa version précédente qui ne l'était pas.

Cette notion de causalité peut sembler non pertinente pour le moment mais elle reviendra comme base théorique dans la partie sur le filtrage. Pour le moment, retenez ce mot de vocabulaire.

Energie et puissance d'un signal

Toute transmission d'information est liée à une transmission d'énergie.

Quand on veut transmettre un signal, ça ne se fait pas sans un peu d'huile de coude. Si vous voulez parler, il va falloir actionner votre diaphragme pour envoyer de l'air dans votre conduit vocal. Si vous voulez envoyez un e-mail, votre ordinateur a intérêt à être branché sur le réseau électrique. Les photons qui se propagent jusqu'à votre rétine pour y projeter une image ne sont pas arrivés là par magie. Tous ces procédés utilisent une source d'énergie pour pouvoir se déplacer. Et en se déplaçant, ils transmettent de l'information.

Question : Comment caractériser l'énergie d'un signal ?

Quand je parle à voix basse, j'utilise peu d'énergie. Si on traçait le signal de ma voix, il aurait d'assez faibles amplitudes. Au contraire, si je me mets à crier, je vais mettre beaucoup plus d'énergie dans ma voix et le signal atteindra des amplitudes beaucoup plus fortes.

On peut donc construire une estimation de l'énergie à partir des amplitudes du signal. Allons y pas à pas. Qu'est ce qui est le plus logique ? On aimerait connaitre la puissance à un instant donnée. À ce moment-là, on parle de **puissance instantanée** :

$$\boxed{P(t) = |x(t)|^2}$$

Attention : vous avez remarqué que j'ai changé de mot, je suis passé de **'énergie'** à **'puissance'**, je ne me suis pas trompé. Il y a un lien simple entre les deux, la puissance est la quantité d'énergie fournie par unité de temps. Nous allons arriver doucement vers l'énergie...

La puissance est donc bien directement lié à l'amplitude du signal. Mais pourquoi cette valeur absolue et ce carré ?

- Un signal peut avoir des valeurs négatives. Si on n'utilisait pas la valeur absolue et qu'on conserverait le signe, on se retrouverait avec un signal qui peut avoir une puissance négative ou avec les équations qui vont suivre un signal à énergie nulle. C'est absurde. Vous pourriez objecter que le carré suffirait à éviter les valeurs négatives. Oui, si le signal est à valeurs réelles, mais si c'est un signal à valeurs complexes ?
- En électronique, la puissance d'un signal électrique est lié à son intensité élevé au carrée. Sa définition en traitement du signal reste cohérente car les deux domaines sont liés, c'est pourquoi il y a un carré qui traine.

On sait évaluer la puissance en un point, maintenant comment l'évaluer sur un certain temps ? Imaginons que notre signal soit défini sur 2 points.
On pourrait écrire sa puissance comme ceci :

$$P = \frac{1}{2}\left(|x(0)|^2 + |x(1)|^2\right)$$

Sur 3 points :

$$P = \frac{1}{3}\left(|x(0)|^2 + |x(1)|^2 + |x(2)|^2\right)$$

Et ainsi de suite avec N points:

$$P = \frac{1}{N}\left(|x(0)|^2 + |x(1)|^2 + ... + |x(N)|^2\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x(n)|^2$$

Finalement, calculer la puissance sur N points du signal revient à calculer la moyenne des puissances instantanés. Mais il reste un souci, on a dit un peu plus haut que les signaux avaient pour ensemble de départ $\mathbb{R}$. Donc dès que vous prenez un bout du signal, aussi petit soit-il, vous y retrouverez une infinité de points. Donc si on veut calculer notre puissance avec notre formule, ça veut dire qu'on va devoir sommer une infinité de points. Ça risque d'être (à peine) long. Nous ne sommes pourtant pas dans une impasse. Je passe sur la preuve mathématique, mais le fait de faire tendre notre somme vers un nombre infini de termes nous permet d'utiliser un grand outil des mathématiques : **l'intégrale**.

Prenons un signal $x(t)$ quelconque. Découpez-y un bout de durée T. Et pour calculer la puissance moyenne, appliquez :

$$\boxed{P(t_0, T) = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} P(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt}$$

On voit bien qu'on utilise la puissance instantané $P(t) = |x(t)|^2$. Le dt nous rappelle qu'on parcourt notre signal suivant la variable t entre les bornes $t_0 + \frac{T}{2}$ et $t_0 - \frac{T}{2}$. On considère donc la portion de signal de taille T centré autour de t_0. L'intégrale $\int$ est là pour sommer la contribution de l'infinité de points compris dans la portion. Et tout ça sans oublier le $\frac{1}{T}$ car la puissance est définie comme une énergie délivré par unité de temps.

La puissance moyenne du signal se déduit simplement comme étant défini par :

$$\boxed{P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt}$$

On fait notre calcul intégral sur l'ensemble du signal en faisant tendre les bornes vers les deux infinis.

Prenons le cas particulier d'un signal périodique. Il y a donc un même motif de durée T qui se répété indéfiniment dans le temps. Et l'intégrale de ce motif est toujours la même et se répète aussi dans le temps. Alors vu qu'on fait une moyenne de cette intégrale, pourquoi s'embêter à intégrer sur $\mathbb{R}$ tout entier ? La moyenne de l'ensemble $\{5, 5, 5\}$ se calcule comme étant $(5 + 5 + 5) \div 3 = 5$. Rajouter des 5 n'y changera rien. Pour $\{5, 5, 5, 5, 5\}$ la moyenne est $(5 + 5 + 5 + 5 + 5) \div 5 = 5$. Il suffit donc d'intégrer notre signal sur une seule période :

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2}$$

Et enfin on y arrive. On a dit que la puissance correspondait à l'énergie fournie par unité de temps. Il suffit donc de considérer toutes les contributions des points sans moyenner le résultat par la durée du phénomène. L'énergie s'écrit de façon plus simple que la puissance :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Question : Quels sont les caractéristiques énergétique des signaux ?

On peut estimer que le signal est à **amplitude bornée** si $\forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| < +\infty$. Ca correspond bien sûr à une réalité physique, il serait absurde de voir un point ayant une amplitude infinie et donc une puissance instantané infinie autrement que pour une considération de modélisation mathématique.

Nous distinguerons deux autres ensembles de signaux. Le premier rassemble tout les **signaux à énergie infinie**. C'est le cas par exemple des signaux périodiques qui sont définis sur un support non borné. Intégrer la puissance instantané qui est une fonction toujours positive sur tout $\mathbb{R}$ fait tendre l'énergie vers l'infini. Ils ont aussi la caractéristique d'être à puissance moyenne non nulle. Ça n'a bien sûr pas de sens physiquement *(un système qui produit une énergie infinie, ça ferait longtemps qu'on aurait éteint toutes les centrales...)*. Ça montre la limitation du modèle mathématique face à la réalité.

Le deuxième est donc, par contraposée, la réunion de tous les **signaux à énergie finie**. Ils ont aussi la caractéristique d'être à puissance moyenne nulle. Tous les signaux de la vie réelle, qui sont tous définis sur un support borné, sont bien sûr à énergie finie.

Résumé

Pour finir ce chapitre haut en couleurs, nous allons écrire un petit tableau. Nous avons discuté du fait qu'en traitement du signal les signaux sont vus comme des fonctions. Tout ça nous permet d'utiliser tous les domaines des mathématiques. Cependant, les hypothèses qu'on fait dans nos modèles mathématiques ne sont pas souvent applicables au monde réel. Voici donc un tableau qui résume les différences entre signaux et fonctions que nous avons vu en partie dans ce chapitre.

Monde réel (signaux)	Monde mathématique (fonctions)
Un signal possède une énergie finie	Une fonction peut posséder une énergie théorique infinie
Un signal est causal et à support borné	Une fonction peut être non causal et à support non borné
Les signaux sont à valeurs réelles	Les valeurs des fonctions peuvent appartenir à d'autres ensembles que $\mathbb{R}$
Un signal est continu temporellement	Une fonction peut présenter des discontinuités en certains points

Remarque : il est important de noter que l'introduction de tels modèles mathématiques nécessite une interprétation des résultats obtenus après traitement pour retrouver ensuite la réalité.

Le bruit, une notion relative

Notre monde n'est point parfait et il mène la vie dure aux traiteurs de signaux.

Le bruit, notre nouvel ennemi numéro 1 ?

Le même pour tout le monde ?

Qu'est ce que pour vous le bruit ?

Vous pourriez me citer des exemples comme votre petit frère qui pleure, le moteur du camion-poubelle à 7h le matin, la pluie qui tape au carreau, une porte qui claque, un micro-ondes en marche voir le dernier titre pop à la mode à la radio. Et il y encore plein d'autres choses qu'on pourrait énoncer. Pour résumer, on pourrait considérer le bruit comme étant tout ce qui est nous désagréable à l'oreille et donc non désiré.

Et en traitement du signal ?

En traitement du signal, le bruit n'a pas exactement le sens, mais reste dans le même ordre d'idée. Nous avons dans le premier chapitre, que l'étude d'un signal était intéressante parce que il est porteur d'information. Mais ce n'est pas vrai pour tous les signaux qu'on observe. Le bruit est peu le Mr Hyde de l'information. On désignera un signal comme étant du bruit quand il est non désiré et surtout **non porteur d'information**.

Sous le terme de bruit, on fait donc référence à la somme de touts ces signaux qui vont venir perturber nos observations en :

- se rajoutant et se superposant au dessus du signal
- dégradant le signal original
- créant des artefacts (des signaux artificiels qui peuvent sembler réels)

On pourrait résumer ça comme ça :

$$\boxed{\text{Signal} = \text{Information} + \text{Bruit}}$$

Ça reste bien sûr une vision simpliste, mais cette fausse équation mathématique résume bien l'idée de différencier dans un signal d'un côté la partie utile porteuse d'informations et de l'autre le bruit qui n'en apporte pas et va même dégrader l'information portée par le signal utile.

Notation : On désigne souvent par 'signal' ou 'signal utile' la partie porteuse d'informations et le reste étant du bruit.

Je vous propose d'écouter un signal audio très parlant. Ce fichier contient un signal de parole provenant d'une speakerine parlant en anglais.

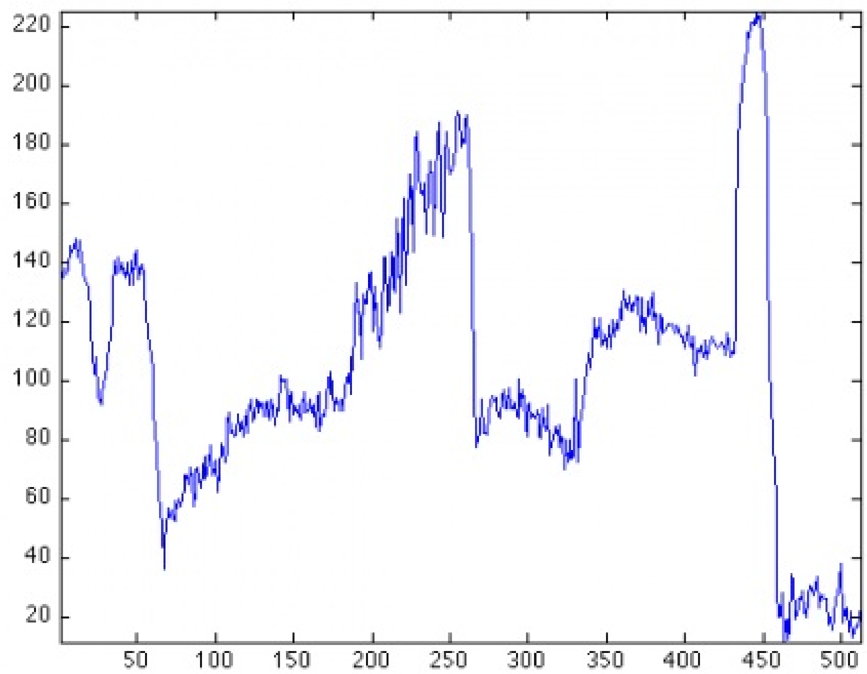
Écouter la radio ! (217Ko, OGG)

Cependant, le signal radio est fortement perturbé par le grésillement qu'on entend en fond. Donc dans ce signal, il y a un mélange entre un signal de parole (l'information) et des grésillements du à la qualité de la chaine d'émission et de réception radio (le bruit).

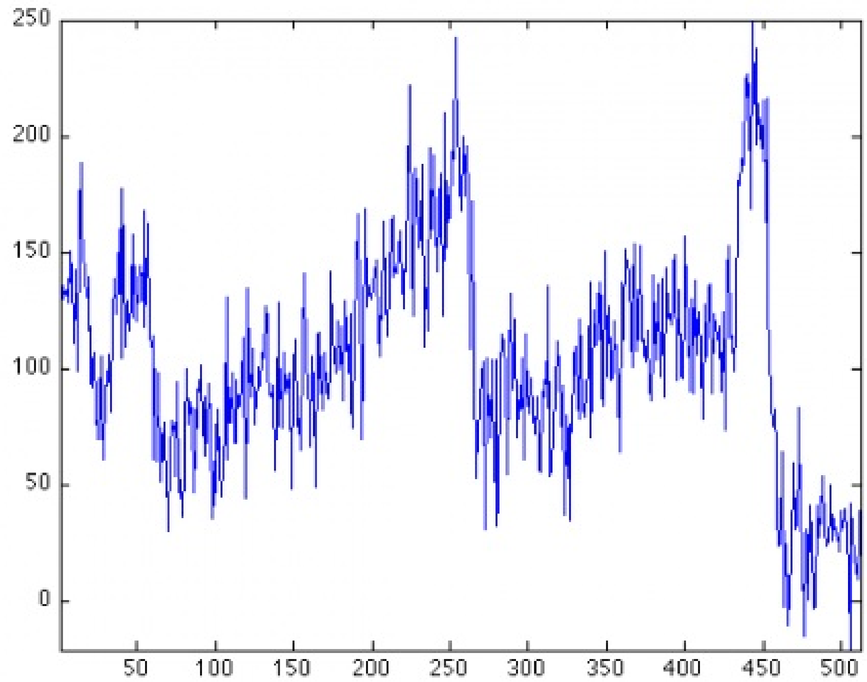
Je ne vous ai cité que des exemples impliquant de l'audio. La notion de bruit est très intuitive avec les sons car on la vit en permanence au quotidien. Mais pour un traiteur de signaux, le bruit est un challenge permanent qui existe dans tous les domaines. Pour vous montrer un exemple en traitement d'image,

Ce bout de photo correspond à la prise d'un ciel bleu. On s'attend donc à avoir un fond bleu uniforme avec peut-être un léger dégradé. Grossièrement, on a ça, mais si on se penche un peu plus sur la photo, on peut voir des imperfections, des traces violettes,... on est en fait loin de l'uniformité. C'est toutes ces choses qu'on peut qualifier de bruit dans une image. Ici, il a été crée par la chaine d'acquisition de l'image (capteur CCD, échantillonnage, compression,...).

Un dernier exemple en image. Voici un signal unidimensionnel quelconque :



Rajoutons y un peu de bruit et on peut arriver à ça...



Qu'est ce qui est bruit ? Qu'est ce que ne l'est pas ?

Je ne pourrais que vous répondre : **ça dépend !**

Ça dépend de l'expérience et de l'observation que vous êtes en train de mener et de facto quels signaux vous intéressent. Prenons un exemple. Vous êtes en pleine discussion avec trois autres personnes que nous nommerons habilement Riri, Fifi et Loulou. Au début, vous discutez à quatre et vous prenez donc la parole (à peu près) chacun à votre tour. À ce moment-là, si la pièce est silencieuse, on pourra considérer qu'il n'y a pas de bruit, le seul signal acoustique présent dans la salle est la parole du locuteur.

Au bout d'un moment, la discussion diverge et vous commencez à ne plus parler qu'avec Fifi tandis que Riri et Loulou discutent de leur côté sur un autre sujet. On a donc deux discussions en parallèle. Bien sûr, la parole se diffuse dans l'air dans toutes les directions à la fois. Tout le monde entend donc finalement une version mixé des deux conversations. De votre point de vue, seul la parole de Fifi est un signal utile alors que les discours de Riri et Loulou peuvent être considérés comme du bruit. Au contraire, pour Riri la discussion entre vous et Fifi est du bruit alors que seul la parole de Loulou est un signal de parole.

Bruit ou pas bruit ? Ça dépend ! C'est toujours une question de point de vue.

Je vous ai montré qu'un son *(ou tout autre type de signal)* pouvait être soit signal soit bruit suivant le point de vue que l'on prenait, mais il peut très bien être aussi bruit et signal à la fois. Si vous marchez dans la rue en discutant avec quelqu'un, le bruit des voitures sera une gêne pour parler mais pour traverser la route. Tout est relatif !

Qui est le plus fort ?

Il y a une notion qui est importante avec le bruit : **c'est sa puissance**. En traitement du signal, il y a au final aucune situation sans bruit puisque le simple fait d'utiliser une chaine de mesure crée des sources de bruit. On considère en fait un environnement sans bruit quand il est suffisamment négligeable face aux signaux qu'on veut capter. Quand il n'est pas négligeable, son niveau de puissance va influer sur les performances de notre système.

Par exemple, quand vous êtes en discothèque et que vous voulez parler à votre voisin, la musique *(qu'on peut considérer comme source de bruit pour un moment)* va gêner la propagation de votre voix. À ce moment-là, vous avez deux stratégies : soit vous augmentez votre volume de voix au risque de vous faire mal à la gorge, soit vous diminuez le volume de la musique en vous plaçant dans un endroit un peu plus calme. Dans les deux cas, on tente de faire varier la différence de volume (et donc de puissance) entre le signal et le bruit.

Il serait donc intéressant de construire un indicateur qui pourrait nous renseigner sur le niveau de bruit et sur son influence sur le signal utile. Habituellement, on sert de ce qu'on appelle le Rapport signal sur bruit couramment abrégé RSB qu'on peut définir suivant deux échelles.

Échelle linéaire

Soyons méthodiques. Comment construire le RSB pour qu'il soit un indicateur fiable. Quels sont ces caractéristiques ?

- Il doit prendre en compte le signal et le bruit.
- Il doit trouver un moyen de quantifier leur importance, leur force.
- Il doit réussir à mettre en valeur la différence de force entre le signal et le bruit.

L'écriture du RSB ne va pas chercher midi à quatorze heures :

$$\boxed{\text{RSB} = \frac{P_{signal}}{P_{bruit}}}$$

La force du signal (ou du bruit) est quantifié par sa puissance dont on a vu la définition dans le chapitre précédent. On prend bien en compte les deux parties. Et l'exercice qui suit va vous permettre de démontrer que le RSB est pertinent pour quantifier la différence de puissance.

Note : Le RSB est le rapport de deux puissances qui ont la même unité. C'est donc une grandeur scalaire (i.e. un nombre) sans unité.

Exercice : Est-ce qu'un RSB de 1 est préférable à un RSB de 10 si on veut conserver notre signal ?

Secret (cliquez pour afficher)

La réponse est non. On peut réécrire notre formule sous cette forme.

$$\text{RSB} \times P_{bruit} = P_{signal}$$

Donc si $RSB = 10$, alors $10 \times P_{bruit} = P_{signal}$.
La partie du signal qui est rattaché au bruit est donc 10 fois moins puissante que celle qui porte l'information.

Par contre si $RSB = 1$, alors $P_{bruit} = P_{signal}$.
À ce moment-là, les puissances sont équivalentes. Le signal utile est beaucoup plus perturbé et en partie masqué par le bruit.

On cherche donc à avoir un RSB le plus grand possible. Il n'y a pas de limite théorique haute, ça peut tendre à l'infini, mais votre système sera limitant car il ne peut pas délivrer une puissance infinie. La limite basse est par contre de 0 quand $P_{bruit} >> P_{signal}$ qui un cas peu enviable et difficile à gérer.

$RSB > 1$	Signal **plus** puissant que le bruit
$RSB = 1$	Signal **aussi** puissant que le bruit
$RSB < 1$	Signal **moins** puissant que le bruit

Échelle logarithmique

Moi, je ne suis pas complétement satisfait alors je vous propose une définition alternative du RSB :

$$\boxed{\text{RSB}_{dB} = 10 \times \log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{bruit}}\right)}$$

Qu'est ce que vous en dites ? Pour rappel ou si vous ne l'aviez jamais vu avant, $\log_{10}$ correspond au logarithme en base 10 dont vous trouverez un tracé ici. Il peut se définir à partir du logarithme naturel tel que $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \approx \frac{\ln(x)}{2.303}$

Je vous rappelle deux propriétés très intéressantes du logarithme :

$$\forall(a,b) \in \mathbb{R}^+, \log_{10}(a \times b) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$$
$$\log_{10}(\frac{a}{b}) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$$

Il a donc le pouvoir de transformer le produit *(la division)* de deux nombres en la somme *(la soustraction)* de leurs logarithmes.

Note : Vous avez peut-être remarqué le petit dB qui est marqué en dessous de RSB. Le fait d'utiliser le logarithme dans notre définition entraine qu'on exprime le résultat en décibels qu'on abrège par dB.

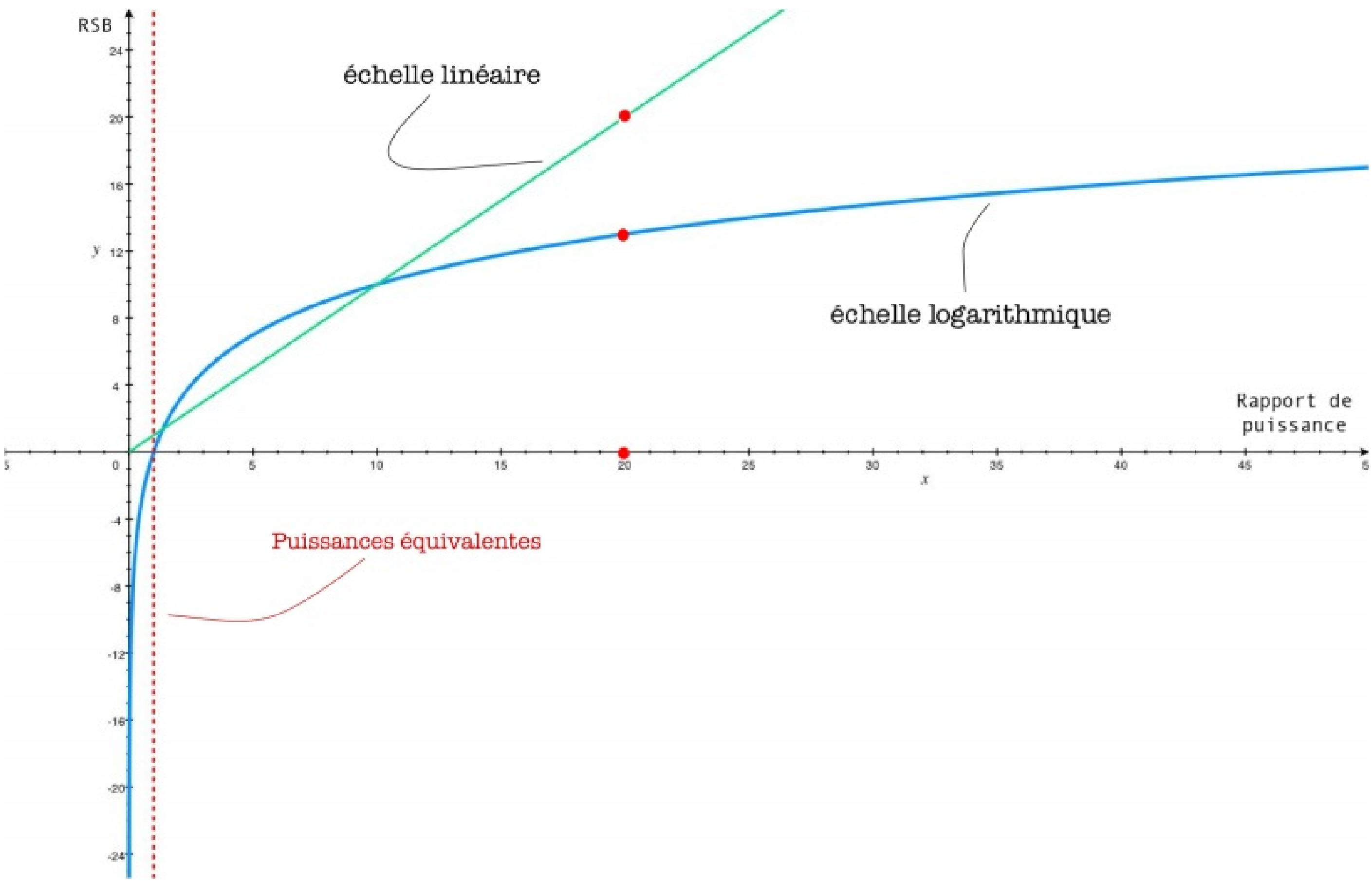
C'est bon, vous avez compris ? Allez hop, chapitre suivant...

Attends, attends. On avait un RSB avec une définition super simple qui marchait bien et tu veux le changer en rajoutant un log sans raison comme ça ?

Ah... ce n'est pas suffisant ? D'accord.

Reprenons notre définition et traçons un graphique :

$$\text{RSB}_{dB} = 10 \times \log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{bruit}}\right) = 10 \times \log_{10}(RSB)$$



L'abscisse correspond au rapport de puissance $\frac{P_{signal}}{P_{bruit}}$, l'ordonné au RSB. Dans le cas de notre première définition, la relation est triviale puisque le RSB vaut exactement le rapport de puissance, il suffit donc de tracer $y = x$. Dans l'autre cas, on trace $y = 10\log_{10}(x)$. Donc pour un **même** rapport de puissance, le RSB ne sera pas le même suivant qu'on prenne l'échelle linéaire ou l'échelle logarithmique (cf. l'exemple des trois points rouges quand le rapport de puissance vaut 20).

L'échelle linéaire est la plus intuitive bien sûr. Une variation de P_{signal} ou de P_{bruit} entraine une variation directement proportionnelle du RSB. Vous me diriez que la vie est belle et qu'il n'y pas besoin de se compliquer la vie avec un logarithme.

Avant de vous justifier son utilisation, faisons quelques calculs. Imaginons que la puissance du signal utile soit exactement deux fois supérieur à la puissance du bruit donc que $P_{signal} = 2 \times P_{bruit}$. On peut réinjecter ça dans l'équation du RSB en décibels :

$$\text{RSB}_{dB} = 10\times\log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{bruit}}\right) = 10\times\log_{10}\left(\frac{2 \times P_{bruit}}{P_{bruit}}\right) = 10\times\log_{10}(2) = +3 \text{ dB}$$

On peut donc en conclure qu'un rapport signal sur bruit de $+3$ dB correspond à un rapport de puissance 2 entre le signal et le bruit.

On peut faire ce calcul pour d'autres valeurs :

Rapport de puissance	RSB en décibels
$0,0001$	-60 dB
$0,001$	-40 dB
$0,01$	-20 dB
$0,1$	-10 dB
$0,5$	-3 dB*
1	$+0$ dB
2	$+3$ dB*
10	$+10$ dB
100	$+20$ dB
10000	$+40$ dB
1000000	$+60$ dB

(*) : En réalité $10 \times \log_{10}(2) = 3,0102999...$, *mais l'approximation à +3dB est communément admise.*

À retenir : Il est important de connaitre les valeurs remarquables des décibels et le rapport de puissance que ça implique. L'échelle logarithmique n'est pas simple à appréhender et avoir quelques points de repère est bénéfique.

Faisons un autre calcul. Imaginons un signal dont le RSB est fixé. On veut faire augmenter ce RSB de 3 décibels. Quel variation cela va entrainer sur le rapport de puissance ? Vous pouvez essayer de le faire en vous rappelant les propriétés du logarithme que je vous ai redonnées précédemment.

Secret (cliquez pour afficher)

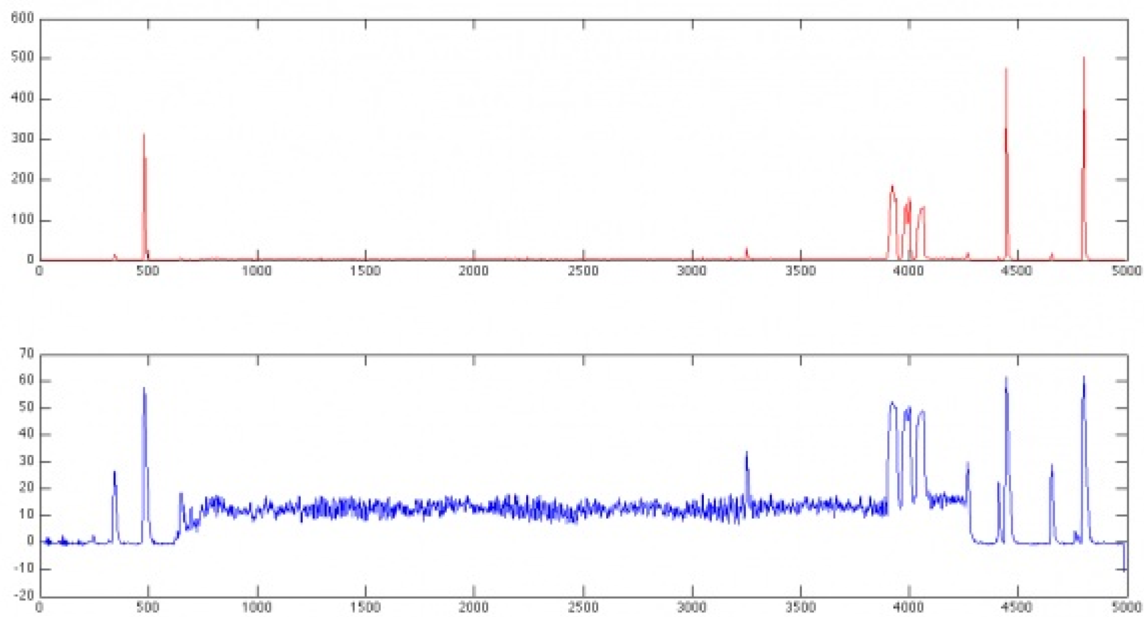
$$\begin{aligned}\mathrm{RSB}_{dB} + 3\mathrm{dB} &= 10 \times \log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{bruit}}\right) + 10 \times \log_{10}(2) \\ &= 10 \times \left(\log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{bruit}}\right) + \log_{10}(2)\right) \\ &= 10 \times \left(\log_{10}\left(2 \times \frac{P_{signal}}{P_{bruit}}\right)\right)\end{aligned}$$

Rajouter 3 décibels correspond **toujours** à doubler la puissance du signal (ou à diviser par deux la puissance du bruit). On peut appliquer les résultats du tableau précédent. Par exemple, ajouter 20 décibels va multiplier par 100 le rapport de puissance.

L'échelle va modifier la répartition des valeurs. Pour les grandes valeurs, il va y avoir une atténuation. Pour les rapports de puissance inférieurs à 1, le RSB va passer en négatif et tendre de plus en plus vite vers l'infini quand on se rapproche de 0. Un rapport de puissance de 0 est bien sûr impossible (L'un des deux signaux doit être à énergie infinie...).

La répartition des valeurs change, mais sans rien dégrader. Comme la fonction logarithme est monotone et croissante, alors le comportement reste quand même similaire à celui de l'échelle linéaire : les maximas se trouveront toujours au même et une augmentation du rapport de puissance crée une augmentation du RSB (et inversement).

Alors, au final pourquoi l'échelle logarithmique c'est plus mieux ?



Ce signal est la variation de la puissance moyenne d'un signal audio. La première courbe en rouge correspond à l'échelle linéaire et la bleue à l'échelle logarithmique. De quoi s'en rend-t-on compte ? On a complétement distordu la répartition des données sur l'axe des ordonnées.

- Les valeurs maximales ont été réduites (de 500 à 60). La présentation des données sur cette échelle est utile quand elles couvrent une large bande de valeurs. Passer au logarithme permet de réduire la taille de cette bande de façon considérable. Cette stratégie est par exemple utilisé pour tracer les réponses en fréquences des filtres en électronique où les deux axes sont gradués sur une échelle logarithmique (on parle alors de repère log-log).
- Cette distorsion fait apparaitre le signal sous un autre jour. Les grandes contributions sont minimisés alors qu'au contraire les faibles valeurs sont mis en valeur. Regardez la différence de taille pour le premier pic suivant l'échelle ! Passer à cette représentation permet de mieux voir la dynamique du signal. On peut par exemple au milieu l'apparition d'un bruit de fond qui était plus difficile sur l'autre courbe.

Rappelons que :

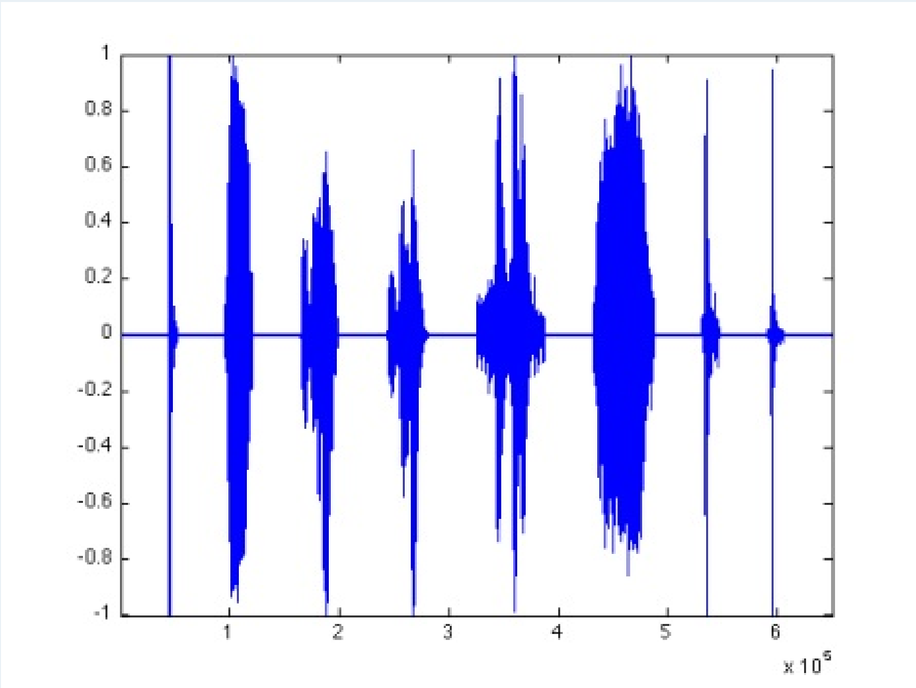
$RSB_{dB} > 0$	Signal **plus** puissant que le bruit
$RSB_{dB} = 0$	Signal **aussi** puissant que le bruit
$RSB_{dB} < 0$	Signal **moins** puissant que le bruit

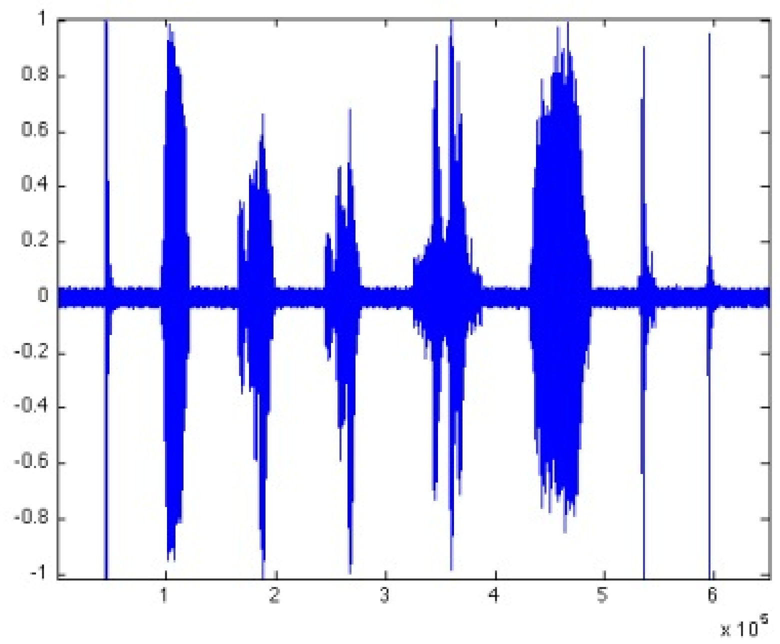
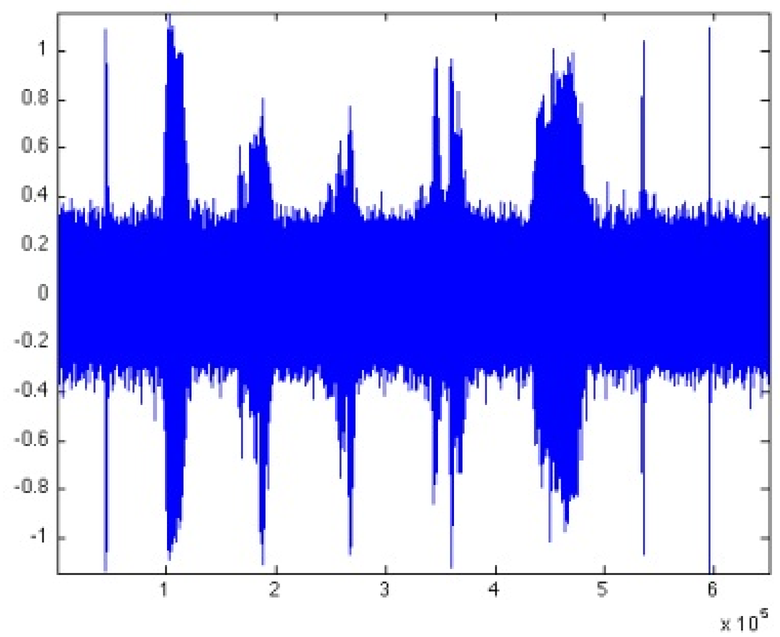
Cette propriété $\log_{10}(ab) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$ qui peut sembler anodine est très intéressante. Par exemple, quand on a une cascade de systèmes qui vont modifier le RSB, sa variation totale est simplement égale à la somme des variations de chaque système. Et une variation positive correspondra toujours à un gain et une variation négative à une atténuation.

Il est aussi intéressant de noter que certains de nos sens comme l'audition obéissent à des échelles logarithmiques. La perception qu'on a de l'amplitude ou de la fréquence des sons n'est pas linéaire et s'approche plus de lois logarithmiques. Il est donc pertinent d'utiliser les mêmes échelles.

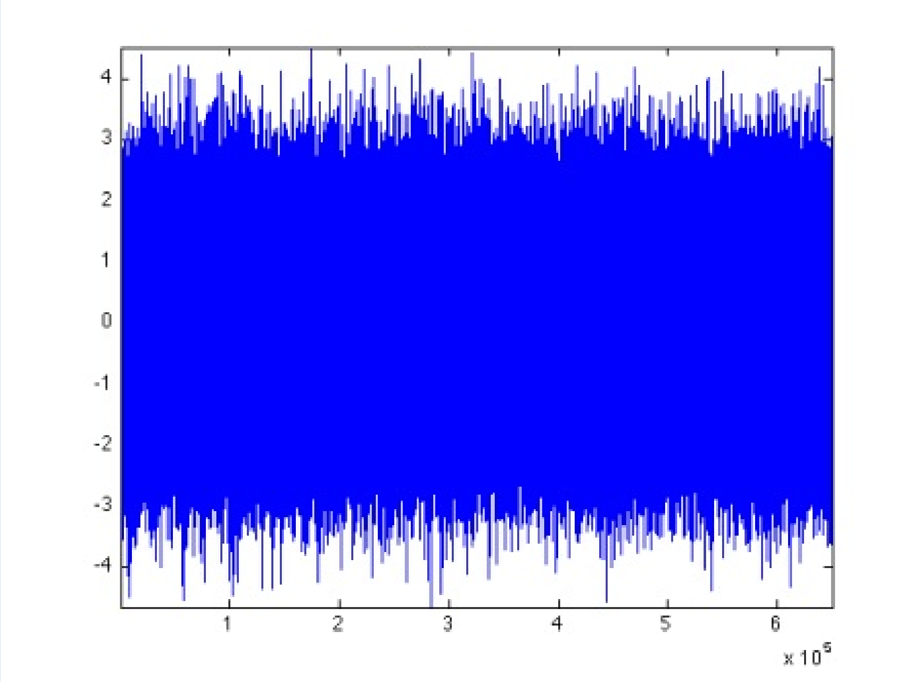
Attention : la plupart du temps, le RSB est exprimé en décibels ! Si quelqu'un vous dit "J'ai un RSB de 20", il y a de fortes chances qu'on vous parle d'un RSB de +20 décibels.

Pour finir, je vais vous montrer un exemple de signal dégradé par du bruit à différents niveaux de RSB. C'est un signal audio et sur la bande, on retrouve de la parole, un bruit d'alarme, un bruit de porte, etc. J'ai ensuite rajouté artificiellement du bruit. Ce bruit est dit blanc et a des propriétés très intéressantes que nous verrons plus tard.

Niveau de bruit	Signal bruité
Signal original	

<table>
<tr><td>+25 dB</td><td>
</td></tr>
<tr><td>+4 dB</td><td>
</td></tr>
</table>

-12 dB



On peut voir qu'au final, le signal **est noyé** dans le bruit. Vous êtes surement en train de vous dire qu'un tel niveau de bruit détruit complétement le signal et que ça serait une perte de temps de tenter d'en tirer quelque choses. Il n'y a plus d'information viable ! Nous n'allons pas abandonner comme ça. C'est vrai que, de ce point de vue temporel, la tâche peut sembler impossible. **Alors pourquoi ne pas changer de point de vue ?**

Vous êtes à la fin ce cours. D'autres chapitres sont encore à venir !

- Vous pouvez poser des questions techniques sur le forum si des points restent flous.
- Si vous voulez parler/commenter/questionner au sujet du cours, faites-le dans les commentaires ou par message privé.